社会的選択理論の基礎

–アローの定理, 多数決, ギバード・サタースウェイトの定理を中心として–

中央大学 法学部

田中靖人

〒192-0393 東京都八王子市東中野 742-1 中央大学 2 号館 7 階

E-mail: yasuhito@tamacc.chuo-u.ac.jp

2001 年 11 月 19 日

目 次

1　個人および社会の選好あるいは評価，社会的選択ルール

1.1　個人の選好あるいは評価

社会的選択理論 (social choice theory) で言う社会的選択 (social choice) とは[1]，個人が集まって作られる社会や集団における意志決定，具体的に言えば複数の選択肢に順序づけをする，あるいはその中から１つを選ぶことを意味する。社会的選択理論では社会や集団は個人の集まりとして捉え，個人を超越した存在とは考えない。１人１人の考え方，意見，選好（好み）はそれぞれに異なるであろう。その異なる選好をどのようにして集計し社会としての意志決定をすることができるか，あるいはできないかということを研究するのが社会的選択理論である[2]。

まず個人の選好の表し方とその性質について考察する。ある社会（集団）に n 人（n は２以上の有限な正の整数）の個人がいて，選ぶべき選択肢が m 個（m は３以上の有限な正の整数）あるものとする。n 人の中のある人を個人 i（i は正の整数）と呼び（以降，個人 i ですべての個人を代表させる），選択肢の中の異なる３つを x，y，z とする（x，y，z は選択肢の名前と考えればよい)。個人の集合を N で，選択肢の集合を A で表す。

個人 i が y より x を好む (prefer x to y) とき

$$xP_iy$$

と表すことにする。添え字 i は個人 i の選好であることを意味する。ここで**好む**というのは，例えば x，y，z などが政府が行うべきある政策の選択肢であるとすれば**支持する**あるいは**評価する**などという意味を表すと解釈できる。

個人 i が x と y とを同じ程度に好む（同等に評価する）ときには個人 i は x と y について**無差別である (indifferent)** と言い

$$xI_iy$$

で表す。これは yI_ix と書いても同じ意味である。また個人 i が『y より x を好むか，または x と y について無差別である』ときには

$$xR_iy$$

と表す。すなわち xR_iy は『xP_iy であるかまたは xI_iy である』ことを意味する。R_i という記号で個人 i の選好を表す。

R_i を用いると xP_iy は

$$xR_iy \text{ であって } yR_ix \text{ ではない（非対称性）}$$

ことを意味し，xI_iy は

$$xR_iy \text{ であり，かつ } yR_ix \text{ である（対称性）}$$

ことを意味するものと解釈できる。P_i は R_i の非対称要素 (asymmetric factor)，I_i は R_i の対称要素 (symmetric factor) と呼ばれる。xP_iy は xR_iy であって xI_iy ではないことを意味するとも言える。

[1]社会選択，集団的（あるいは集合的）選択 (collective choice) とも言う。

[2]本稿の用語法は概ね Sen (1979) および 鈴村 (1983) に従った。

個人 i についてその選好を考えて来たが，もちろん n 人の個人すべてが同様の選好を持っている。人それぞれ選好は異なるかもしれない，というより選好が異なる個人の集まりにおける意志決定の方法を研究するのが社会的選択理論である。

個人の選好についていくつかの性質を仮定する。

R_i の完備性 (completeness) 各個人は選択肢のすべての（異なる 2 つづつの）組み合わせについて一方を他方より好むか，あるいは 2 つが無差別であるかの判断ができるものとする。記号で書けば

> A に含まれる（属する）すべての互いに異なる x，y について xR_iy または yR_ix である。

この性質は連結性 (connectedness) とも呼ばれる。これが成り立たないと意志決定はできない。

R_i の反射性 (reflexivity) あらゆる選択肢 x について xR_ix である。xP_ix ではないので xI_ix であることを意味する。

R_i の推移性 (transitivity) あらゆる 3 つの異なる選択肢の組 (x, y, z) について xR_iy かつ yR_iz ならば xR_iz である。

R_i の推移性から P_i の推移性，I_i の推移性，P_i と I_i の推移性，および I_i と P_i の推移性が導かれる。

定理 1.1. R_i の推移性が成り立てば

（1）I_i の推移性（II 推移性）（xI_iy かつ yI_iz ならば xI_iz である）

（2）P_i と I_i の推移性（PI 推移性）（xP_iy かつ yI_iz ならば xP_iz である）

（3）I_i と P_i の推移性（IP 推移性）（xI_iy かつ yP_iz ならば xP_iz である）

（4）P_i の推移性（PP 推移性）（xP_iy かつ yP_iz ならば xP_iz である）

が成り立つ。

証明. (1) I_i の推移性

xI_iy かつ yI_iz であれば xR_iy かつ yR_iz であるから R_i の推移性から xR_iz が得られる。同様に xI_iy かつ yI_iz であれば，zI_iy かつ yI_ix であるから zR_iy かつ yR_ix となるので zR_ix が得られる。したがって xI_iz となる。

(2) P_i と I_i の推移性

xP_iy かつ yI_iz であれば R_i の推移性から xR_iz が得られるので xI_iz でないことを示せばよい。そこで xI_iz と仮定してみよう[3]。すると (1) で証明した I_i の推移性によって yI_iz，xI_iz (zI_ix) から yI_ix が得られる。しかしこれは xP_iy と矛盾する。したがって xP_iz である。

(3) I_i と P_i の推移性

[3] この証明のように主張すべきことが正しくないと仮定すると矛盾に陥ることを示すことによって主張が正しいことを証明する方法を**背理法**と呼ぶ。

xI_iy かつ yP_iz であれば R_i の推移性から xR_iz が得られるので xI_iz でないことを示せばよい。xI_iz と仮定してみよう。すると (1) で証明した I_i の推移性によって xI_iy (yI_ix)，xI_iz から yI_iz が得られる。しかしこれは yP_iz と矛盾する。したがって xP_iz である。

(4) P_i の推移性

xP_iy かつ yP_iz であれば R_i の推移性から xR_iz が得られるので xI_iz でないことを示せばよい。xI_iz すなわち zI_ix と仮定してみよう。すると (3) で証明した I_i と P_i の推移性によって zI_ix，xP_iy から zP_iy が得られる。しかしこれは yP_iz と矛盾する。したがって xP_iz である。 □

この定理の (2) と (4) は『xP_iy かつ yR_iz ならば xP_iz である』ことを，(3) と (4) は『xR_iy かつ yP_iz ならば xP_iz である』ことを意味する。

逆に完備性のもとで P_i の推移性と I_i の推移性が成り立てば R_i の推移性が成り立つことが示される。

定理 1.2. R_i が完備性を満たせば，P_i の推移性と I_i の推移性が成り立つとき R_i の推移性が成り立つ。

証明. まず P_i の推移性と I_i の推移性から P_i と I_i の推移性が導かれることを示す。xP_iy かつ yI_iz であるが xP_iz ではなく zR_ix であると仮定してみよう。zP_ix であれば zP_ix，xP_iy より zP_iy となる。しかしこれは yI_iz と矛盾する。一方 zI_ix であるとすると yI_iz，zI_ix より yI_ix となる。しかしこれは xP_iy と矛盾する。よって xP_iz でなければならないから P_i と I_i の推移性が成り立つ。

次に，xR_iy かつ yR_iz であるが xR_iz ではなく zP_ix であると仮定する。xR_iy かつ yR_iz であるとき次の 4 つのケースがあり得る。

(1) xP_iy かつ yP_iz，あるいは xP_iy かつ yI_iz

この場合 zP_ix，xP_iy から P_i の推移性によって zP_iy となるが，これは yP_iz あるいは yI_iz と矛盾する。

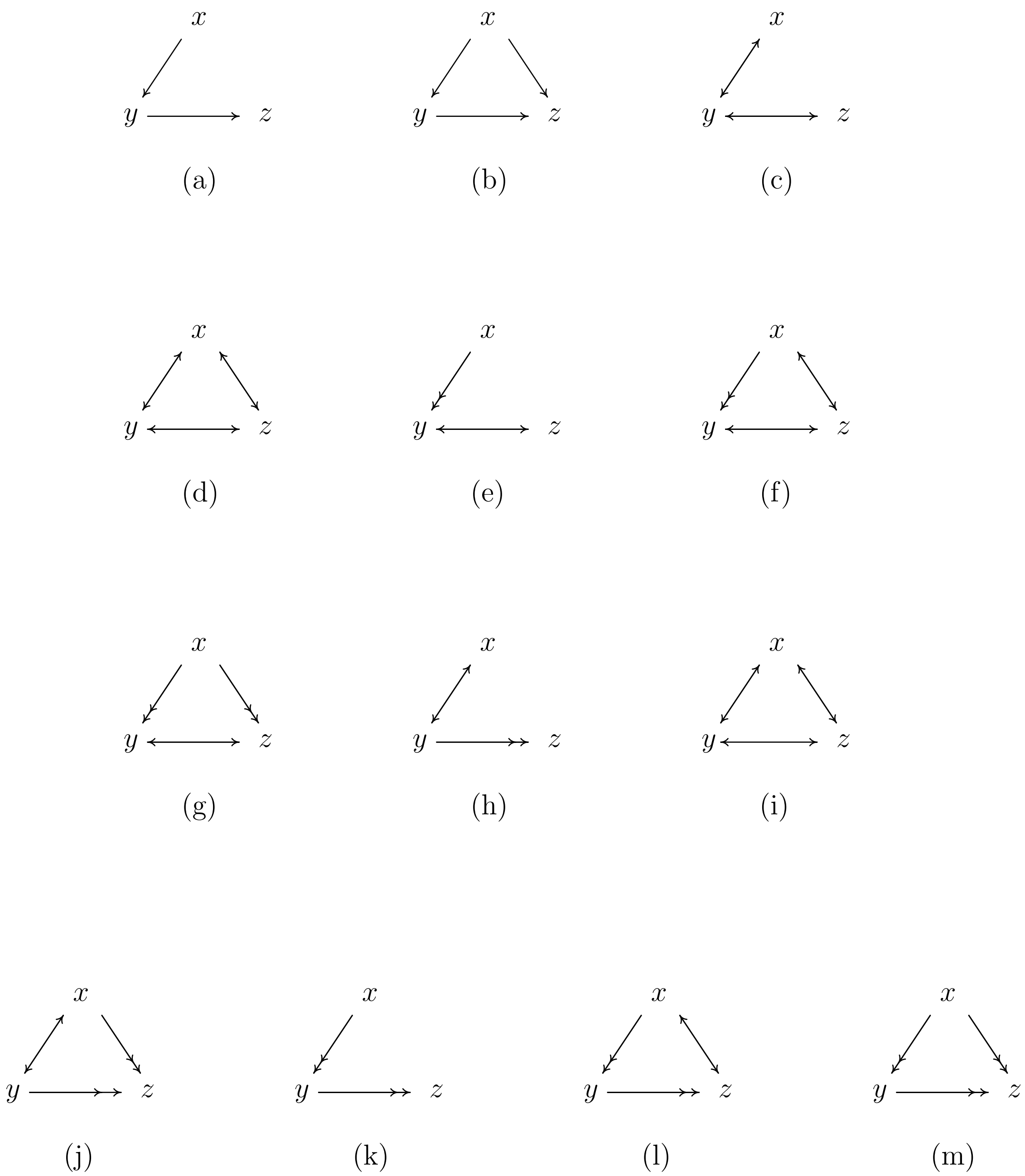
(2) xI_iy かつ yP_iz，あるいは xI_iy かつ yI_iz

この場合 zP_ix，xI_iy から P_i と I_i の推移性によって zP_iy となるが，これは yP_iz あるいは yI_iz と矛盾する。

したがって zP_ix ではないから，R_i の完備性によって xR_iz でなければならない。 □

定理 1.1 の証明の図解. 定理 1.1 の証明を図を用いて考えてみよう。まず，xR_iy，xP_iy，xI_iy をそれぞれ $x \rightarrow y$，$x \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow y$，$x \leftrightarrow y$ と表すことにする。$x \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow y$ と $x \leftrightarrow y$ は $x \rightarrow y$ を意味し，また $x \leftrightarrow y$ は $y \rightarrow x$ をも意味する[4]。

[4] $x \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow y$ は $x \rightarrow y$ であるが $y \rightarrow x$ でないことを，$x \leftrightarrow y$ は $x \rightarrow y$ であって，かつ $y \rightarrow x$ であることを意味する。



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l) (m)

図の (a) は $xR_iy(x \to y)$ かつ $yR_iz(y \to z)$ であることを表し，(b) はそのときに $xR_iz(x \to z)$ となるという R_i の推移性の仮定を表している。

(1) 図の (c) は $x \leftrightarrow y$ かつ $y \leftrightarrow z$ となっている状況を表しているが，(d) に表されているように，そのとき $x \to y$ かつ $y \to z$ であり，また $z \to y$ かつ $y \to x$ でもあるから $x \to z$ かつ $z \to x$ となって $x \leftrightarrow z$ が得られる。

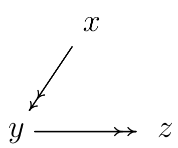
(2) 図の (e) は $x \twoheadrightarrow y$ かつ $y \leftrightarrow z$ となっている状況を表しているが，そのとき図の (b) に示されている仮定によって $x \to z$ である。ここで図の (f) のように $x \leftrightarrow z(z \leftrightarrow x)$ であると仮定すると，(1) により $y \leftrightarrow z$ と $z \leftrightarrow x$ とから $y \leftrightarrow x$ となる。しかしこれは $x \twoheadrightarrow y$ と矛盾するから (g) に示されているように $x \twoheadrightarrow z$ でなければならない。

(3) 図の (h) は $x \leftrightarrow y$ かつ $y \twoheadrightarrow z$ となっている状況を表しているが，そのとき図の (b) に示されている仮定によって $x \to z$ である。ここで図の (i) のように $x \leftrightarrow z(z \leftrightarrow x)$ であると仮定すると，(1) により $z \leftrightarrow x$ と $x \leftrightarrow y$ とから $z \leftrightarrow y$ となる。しかしこれは $y \twoheadrightarrow z$ と矛盾するから (j) に示されているように $x \twoheadrightarrow z$ でなければならない。

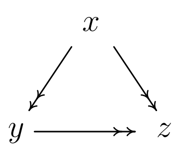
(4) 図の (k) は $x \twoheadrightarrow y$ かつ $y \twoheadrightarrow z$ となっている状況を表しているが，そのとき図の (b) に示されている仮定によって $x \to z$ である。ここで図の (l) のように $x \leftrightarrow z(z \leftrightarrow x)$ であると仮定すると，(3) により $z \leftrightarrow x$ と $x \twoheadrightarrow y$ とから $z \twoheadrightarrow y$ となる。しかしこれは $y \twoheadrightarrow z$ と矛盾するから (m) に示されているように $x \twoheadrightarrow z$ でなければならない。

□

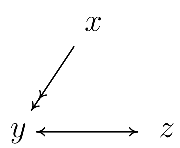
定理 1.2 の証明（後半）の図解. 次に定理 1.2 の証明の後半を図を用いて考えてみる。図の (a) は $xP_iy(x \twoheadrightarrow y)$ かつ $yP_iz(y \twoheadrightarrow z)$ であることを表し，(b) はそのときに $xP_iz(x \twoheadrightarrow z)$ となるという P_i の推移性の仮定を表している。また，図の (c) は $xP_iy(x \twoheadrightarrow y)$ かつ $yI_iz(y \leftrightarrow z)$ であることを表し，(d) はそのときに $xP_iz(x \twoheadrightarrow z)$ となるという P_i と I_i の推移性の仮定を表している。



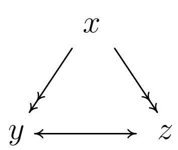
(a)



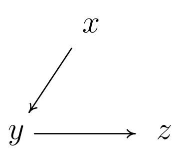
(b)



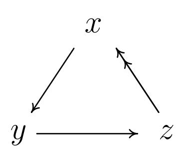
(c)



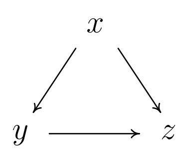
(d)



(e)



(f)



(g)

図の (e) は $x \to y$ かつ $y \to z$ であるとの仮定を表す。そのとき図の (f) のように $x \to z$ ではなく $z \twoheadrightarrow x$ であると考えてみよう。そうすると $z \twoheadrightarrow x$ かつ $x \to y$（$x \twoheadrightarrow y$ または $x \leftrightarrow y$）であるから図の (b) と (d) に示されている仮定（P_i の推移性，P_i と I_i の推移性）に

よって $z \twoheadrightarrow y$ となる。しかしこれは $y \to z$ と矛盾するから (g) に示されているように $x \to z$ でなければならない。 $\square$

個人の選好が推移性を満たせば選択肢に順序（順位）をつけることができる。例えば xP_iy，yP_iz であれば（これを xP_iyP_iz と表すことにする）x，y，z の順に順序づけができる。yI_iz，zP_ix（これを yI_izP_ix と表す，以下同様）であれば y と z がともに 1 位で x が 3 位となる[5]。選択肢に順序をつけることができれば選好の最上位にあるもの（1 つとは限らない，互いに無差別な複数個かもしれない）を選び出すことができる。x が個人 i の選好の最上位にあるとは

選択肢 x について，その他のすべての選択肢 y に対して xR_iy が成り立つ

という意味である。特にすべての y に対して xP_iy が成り立てば x は唯一最上位にある選択肢である。

推移性を満たさない場合，例えば xP_iy，yP_iz であって，かつ zP_ix であればどれが最上位であるか決められなくなってしまう。

次に個人の選好を集計して得られる社会の選好について考えてみよう。

1.2　社会の選好あるいは評価，社会的選択ルール

上で述べたように，社会の選好とは個人を超えた社会や国家なるものがあってそれが意志や感情を持つということではない。存在するのは n 人の個人だけであり，その n 人の選好，評価を何らかの手順，ルールで集計したものが社会の選好である。個人の選好を集計して社会の選好を導き出すルールを**社会的選択ルール (social choice rule)** あるいは**集団的選択ルール (collective choice rule(CCR))** と呼ぶ。

社会における意志決定においては複数の選択肢の中から最良のものを選ぶことが求められるから，社会の選好についても上で見た個人の選好と同様の性質，完備性，反射性，推移性を満たすことが期待される。

社会の選好を個人の選好を表す記号から添え字を取って R，P，I で表す。xPy とは何らかの社会的選択ルールによれば y よりも x が選好（評価）されることであり，xIy は x と y とが同等に選好されることを意味する。また xRy は『xPy であるか，または xIy である』ことである。社会の選好について上記の 3 つの性質は以下のように表現される。

R の完備性 (completeness) A に含まれる（属する）すべての互いに異なる x, y について xRy または yRx である。

R の反射性 (reflexivity) あらゆる選択肢 x について xRx である。

R の推移性 (transitivity) あらゆる 3 つの異なる選択肢の組 (x, y, z) について，xRy かつ yRz ならば xRz である。

やはり R の推移性は P，I の推移性，P と I の推移性および I と P の推移性を意味する。また，完備性のもとで P の推移性と I の推移性から R の推移性を導くことができる。

ここで社会的選択ルールの例を考えてみよう。

[5] どの 3 つの選択肢の組についても順序づけができるので選択肢が 4 つ以上あっても順序づけが可能である。例えば 4 つの選択肢 x，y，z，w について xP_iyP_iz，yP_iwP_iz という選好の場合には $xP_iyP_iwP_iz$ のように順序がつけられる。

単純多数決ルール (simple majority rule) x と y とを比較をする際,（投票などによってその意志が表明される）y より x を好む個人の数が x より y を好む個人の数より多ければ社会としても y より x を好む (xPy) ものとする。同数であれば x と y は社会的に無差別 (xIy) であるとする。x と y について無差別な個人はどちらの数にも入らない（全員が無差別であれば 0 対 0 で社会的にも無差別となる）[6]。集団において 2 つの選択肢を比較するのに最も分かりやすい方法である。

この方法が完備性，反射性を満たすのは明らか（y より x を好む人々の数と x より y を好む人々の数とは常に比較可能であり，x より x を好むということはない）であるが，人々の選好が異なる場合には推移性を満たさない可能性がある。3 人の個人 1，2，3 がいてそれぞれの x，y，z に対する選好が xP_1yP_1z，yP_2zP_2x，zP_3xP_3y であるとしよう。x と y とを比べると x を選ぶのは 2 人，y を選ぶのは 1 人であるから xPy となる。同様にして y と z を比べると yPz が，x と z を比べると zPx が得られるが，これは P の推移性（したがって R の推移性）を満たさず，x，y，z の中で社会的にどれが最も良いか決められない。このような現象は**投票のパラドックス**と呼ばれる。

単純多数決は推移性を満たさないことがわかったが，他にどのような方法が考えられるだろうか。しかし，完備性，反射性，推移性（この 3 つを合わせて**完全合理性**と呼ぶ）だけが望ましい社会的選択ルールの条件ではない。他にも満たすべき条件がある。次にそれらを考えてみよう。

2 民主的な社会的選択ルールが満たすべき条件

個人を超えた社会・国家の存在を否定し，個人の意見や選好を集計して社会的意志決定を行おうとするのであるからそのルールは民主的なものでなければならないが，ここで言う**民主的**の意味は以下のようなものである。

条件 U：人々の選好についてはいかなるものも許される（定義域の非限定性 (unrestricted domain)） すでに投票のパラドックスの説明において 3 人の人々が全く対立する選好を持っている場合を考えた。意見や選好，利害が対立する状況における意志決定を考えるのであるから人々の選好に何らの制約も加えないことが望ましい[7]。

条件 P：パレート原理 (Pareto Principle) ある社会（集合 N）に属する個人全員が y より x を好むという選好を持っていれば社会的にもそのように判断するのが適当である[8]。記号で書けば

---

[6] 多数決にも 3 分の 2 以上の賛成を必要とするなどの変形版があるので，過半数で決まるという意味で**単純多数決**と呼ぶ。

[7] ここで言う定義域とは社会的選択ルールを考える対象となる個人の選好の組み合わせのことであり，それを特定の範囲に限定しないことがこの条件の意味するところである。財の消費については一般的に多ければ多いほどよい（効用が大きい）という**選好の単調性**を仮定するが，政治的な問題なども含む一般的な選択肢においてはそのような仮定は置けない。なお後の節でこの定義域を多少制限して単純多数決がある種の望ましさ（準推移性あるいは推移性）を満たす可能性について考える。

なお，選好の組み合わせとは各自の選好（個人 i で代表させて R_i で表す）があるパターンになっているときの n 人一組の選好の組み合わせのことである。異なる選好の組み合わせを a，b などで表したとき，a，b における各自の選好をそれぞれ R_i^a，R_i^b と表す。xP_i^ay は『xR_i^ay であるが yR_i^ax でない』こと，xI_i^ay（無差別）は『xR_i^ay かつ yR_i^ax』であることを意味する。P_i^b，I_i^b も同様。

[8] **パレート原理**の名は経済学における**パレート効率性（パレート最適）**と同様の趣旨である。

A に属する異なる 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせ (x, y) に関して，N に属するすべての個人 i が xP_iy であれば xPy である

条件 I：無関係な選択対象からの独立性 (independence of irrelevant alternatives(IIA)) 異なる 2 つの選択肢 x と y についての社会的な選好はその 2 つについての個人の選好のみによって決まり，第 3 の選択肢（例えば z）と x あるいは y についての選好にはよらない。

x と y についての社会的な評価を決めるのに当たってはそれ以外の選択肢に関する情報は必要ないという意味で社会的意志決定のための費用をできるだけ節約できるということを主張するものである。少々分かりにくいが後で例を考えれば理解できると思う。

条件 D：独裁者 (dictator) がいないこと 独裁者とはある個人が選好する選択肢が社会的にも選好されるような個人を指す。すなわち

すべての異なる x，y について xP_iy ならば xPy（yP_ix ならば yPx）となる

ような個人である[9]。そのような個人が存在しては民主的な意志決定ルールとは言えない。

以上が完全合理性（完備性，反射性，推移性）に加えて社会的な選好が満たすべき条件である。

先に見た単純多数決ルールは 2 つづつの選択肢の組について各個人がどれを選ぶかを意志表明（投票）させるので条件 I を満たす。また全員一致ならそれが社会的選好にも反映されるし，1 人の人の考えで結果が決まらないから条件 P，D も満たしている。しかし条件 U を前提にすると推移性が満たされないことになるので条件 U を満たさないと言える。人々の選好がある程度似ていれば推移性が満たされる可能性がある（後の節でこの問題を検討する）。特にすべての人がまったく同じ選好を持っていれば常に全員の意志が一致するので，個人の選好が推移性を満たす限り社会の選好も推移性を満たす。しかしその場合には人々の選好のパターンに制約を加えることになるので条件 U が満たされない。

もう 1 つ例を考えてみよう。

ボルダ (Borda) ルール（点数つき投票） 単純多数決ルールでは 2 つづつの組について人々の選好を表明させるが，ボルダルールはすべての選択肢について 1 人 1 人の選好における順位に基づいて点数をつけ，それを全体で合計して社会的な選好順序とするものである。具体的な例を考えてみる。

3 人の個人 1，2，3 がいて，3 つの選択肢 x，y，z があり，各個人の選好が xP_1yP_1z，zP_2xP_2y，yP_3xP_3z であるとする。それぞれ自分が最も好む選択肢に 2 点，次のものに 1 点，最も好まないものには 0 点をつけて投票する。すると x は 4 点，y は 3 点，z は 2 点となるから，社会的な選好においては $xPyPz$ となる。この方法では全員が上位にランクづけするものは社会的にも上位になるので条件 P を満たす。また 1 人の人の考えで結果が決まらないから条件 D を満たしている。すべての選択肢についてその得点の合計は比較可能であり，また数字の大きさを比べるのであるから完備性，反射性，推移性も満たされる。しかし条件 I が成り立たない。

[9] 独裁者とはその厳密な選好 (P_i) を社会に強制できるような個人であるが，無差別関係 (I_i) を強制できることまでは求めない。つまり xI_iy ならば xIy となることまでは要求しない。

今，個人3の選好が上記のものから yP_3zP_3x に変化したと考えてみよう。この変化においては x と z の間の関係が変わっただけで x と y，および y と z の関係には変化がないから，条件 I によれば x と y，y と z の間の社会的選好が変わってはならない。しかし点数を再集計してみると x は3点，y は3点，z も3点となり社会的選好においては $xIyIz$ ということになる，したがって x と y との関係が xPy から xIy に，y と z との関係が yPz から yIz に変わってしまうので条件 I は満たされていない。

3　アローの一般可能性（あるいは不可能性）定理

3.1　『決定的』と『ほとんど決定的』

果たして以上に上げた条件を満たす社会的選択ルールはあるのだろうか。この質問に**ない**と答えるのがアロー (Kenneth Arrow) の一般可能性定理 (general possibility theorem) である。すべての望ましい条件を満たす社会的選択ルールは**不可能**であることを示すものなので不可能性定理 (impossibility theorem) とも呼ばれる[10]。

アローの一般可能性定理 完全合理性（完備性，反射性，推移性），条件 U，P，I，D のすべてを満たす社会的選択ルールはない。

これを言い換えれば

定理 3.1 (アローの一般可能性定理). 完全合理性（完備性，反射性，推移性），条件 U，P，I を満たす社会的選択ルールは独裁的である（条件 D を満たさない）。

となる。この定理を証明しよう。

まず**決定的**と**ほとんど決定的**という言葉を導入する必要がある。後者は以下のように定義される。

ほとんど決定的 (almost decisive) 2つの選択肢 x，y があり，全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が y より x を好み (xP_iy)，V に属さない残りのすべての人々が x より y を好む (yP_ix) とき，常に社会的に y より x が選好される (xPy) ならば，グループ V は『y に対して x についてほとんど決定的である』と言う。

つまり，あるグループに属する人々が y より x を好み，残りの人々が x より y を好むという逆の選好を持つときにそのグループの選好が社会的な選好となる場合にほとんど決定的となる。これに対して**決定的**というのは

決定的 (decisive) 2つの選択肢 x，y があり，全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が y より x を好む (xP_iy) とき，常に社会的に y より x が選好される (xPy) ならば，グループ V は『y に対して x について決定的である』と言う。

と定義される。『ほとんど決定的』との違いはグループ V 以外の人々がそのグループの人々と逆の選好を持つと仮定していないこと，すなわち残りの人々の選好に関わらず x が選ばれるということであり，『ほとんど決定的』よりも意味が強くなっている。あるグループが『決定的』であることはそのグループが『ほとんど決定的』であることを意味する。

[10] アローの一般可能性定理の原典は Arrow (1977) である。

決定的というのは自分（達）が好きなものを社会的にも選ばせることができるという意味である。

独裁者という言葉の意味を『決定的』を用いて次のように述べることができる。

独裁者 (dictator) 独裁者とは 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的であるような 1 人の個人を指す。

すなわち 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的なグループの人数が 1 人であれば，その 1 人が独裁者となる。

3.2 アローの一般可能性定理の証明

この証明は鈴村興太郎によるものである[11]。

まず次の補助定理を示す。

補助定理 3.1 (独裁者の補助定理). 社会的選択ルールが完全合理性，条件 U，P，I を満たし，またある 2 つの選択肢 x，y に関して，y に対して x についてほとんど決定的であるような個人が存在するならば，その個人は 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的である，すなわち独裁者である。

証明. そのような個人を J で表し，J 以外の人々を i で表す。また，個人 J が y に対して x についてほとんど決定的であることを $D(x,y)$ で，y に対して x について決定的であることを $\bar{D}(x,y)$ で表す。

x，y 以外のある選択肢を z とし，次のような選好の組み合わせを考える（条件 U によって許される，以下同様)。

(1) 個人 J：xP_JyP_Jz

(2) 個人 J 以外のすべての人々：yP_ix，yP_iz

J 以外の人々について x と z との間の選好に関しては何も仮定していないことに注意されたい。個人 J は y に対して x についてほとんど決定的であるから社会的に xPy となる。また J を含むすべての人々が z より y を好むので条件 P によって yPz である。すると P の推移性によって xPz が得られる。J 以外の人々については x と z との間の選好に関して何も仮定せず，また条件 I によって x と y あるいは y と z の間の個人的な選好は x と z の間の社会的な選好に影響してはならないから，個人 J は z に対して x について決定的（ほとんど決定的ではなく）であることになる。したがって次の関係が示された。

$$D(x,y) \text{ ならば} \bar{D}(x,z) \tag{3.1}$$

次に以下のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人 J：zP_JxP_Jy

(2) 個人 J 以外のすべての人々：zP_ix，yP_ix

[11] 鈴村 (2000) の Appendix による。

今度は J 以外の人々について y と z との間の選好に関しては何も仮定していない。条件 P によって zPx が得られる。上と同様に個人 J は y に対して x についてほとんど決定的であるから xPy である。すると P の推移性によって zPy が得られるから，上と同じ論法によって個人 J は y に対して z について決定的（ほとんど決定的ではなく）である。したがって次の関係が示された。

$$D(x,y) \text{ ならば} \bar{D}(z,y) \tag{3.2}$$

今の議論の y と z を入れ替えると，J が z に対して y について決定的であることが導かれる。すなわち

$$D(x,z) \text{ ならば} \bar{D}(y,z) \tag{3.3}$$

が得られる。

(3.1) で x，y，z をそれぞれ y，z，x に入れ替えると

$$D(y,z) \text{ ならば} \bar{D}(y,x) \tag{3.4}$$

が得られる。以上を組み合わせると

$$\begin{aligned}
D(x,y)\text{ならば } & \bar{D}(x,z),\ (3.1) \text{ より} \\
\text{ならば } & D(x,z), \text{『決定的』と『ほとんど決定的』の定義から} \\
\text{ならば } & \bar{D}(y,z),\ (3.3) \text{ より} \\
\text{ならば } & D(y,z), \\
\text{ならば } & \bar{D}(y,x),\ (3.4) \text{ より}
\end{aligned}$$

という一連の関係が導かれる。したがって

$$D(x,y) \text{ ならば} \bar{D}(y,x) \tag{3.5}$$

が得られる。$\bar{D}(y,x)$ ならば $D(y,x)$ であるから

$$D(x,y) \text{ ならば } D(y,x) \tag{3.6}$$

となる。

(3.1)，(3.2) および (3.5) において x と y とを入れ替えると

$$D(y,x) \text{ ならば} \bar{D}(y,z),\ \bar{D}(z,x),\ \bar{D}(x,y) \tag{3.7}$$

を得る。したがって (3.6) および (3.7) より

$$D(x,y) \text{ ならば} \bar{D}(y,z),\ \bar{D}(z,x),\ \bar{D}(x,y) \tag{3.8}$$

が得られる。(3.1)，(3.2)，(3.5) および (3.8) を組み合わせると『個人 J が y に対して x についてほとんど決定的である』ことが，『(x,y,z) の内の 2 つからなる選択肢のあらゆる組み合わせ（6 通りある）について決定的である』ことを意味することがわかる。

最後に x，y とは異なる 2 つの選択肢 u，v をとる。(x,y,u) の組み合わせを考えると上の議論から $\bar{D}(x,u)$ であることが得られる。これは $D(x,u)$ を意味する。次に (x,u,v) の集合

を考えると $D(x,u)$ であるから，上の議論の y を u に z を v に入れ替えて $\bar{D}(u,v)$，$\bar{D}(v,u)$ を得る。

以上によって，『個人 J が y に対して x についてほとんど決定的である』ことが，『2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的である』ことを意味することがわかる。すなわち J は独裁者である。 □

この補助定理を用い，以下の手順で証明を進める。

(1) n 人（n は 3 以上）からなる社会においてアローの定理のすべての条件（完全合理性，条件 U，P，I，D）を満たす社会的選択ルールがあるならば，1 人少ない $n-1$ 人の社会においてもそのような社会的選択ルールがある。

この論理を繰り返し使うと，例えば地球上の人口をはるかに越える 1000 億人からなる社会においてアローの定理のすべての条件を満たす社会的選択ルールがあれば 2 人の社会においてもそのような社会的選択ルールが存在しなければならない。しかし

(2) 2 人からなる社会にはアローの定理のすべての条件を満たす社会的選択ルールはない。

したがってアローの定理のすべての条件を満たす社会的選択ルールは一般的に存在しない。

という論法を用いる。

まず最初の手順から始めよう。

補助定理 3.2. n 人（n は 3 以上）からなる社会においてアローの定理のすべての条件を満たす社会的選択ルールがあるならば，$n-1$ 人の社会においてもそのような社会的選択ルールがある。

証明. n 人の人々の選好の組み合わせに対して社会的選択ルールが構成される，つまり n 人の人々の選好が，あるルールに基づいて社会的な選好に移されるわけであるが，まず n 番目の人（個人 n）が**あらゆる選択肢について無差別である**ような選好を持っている場合に限定して考える。条件 U によってそのような選好も許される。そしてそのときの社会的な選好を，個人 n を除いた $n-1$ 人からなる社会の社会的な選好として定義する。例えば個人 1，2，3 の 3 人からなる社会において 3 つの選択肢 x，y，z について，個人 1 が xP_1yP_1z，2 が zP_2xP_2y，3 が xI_3yI_3z という選好を持っているときに（あるルールに基づいて）社会的に $xPzPy$ であるとするなら（またそのときに限り），個人 1 と 2 からなる 2 人の社会において xP_1yP_1z，zP_2xP_2y のとき $xPzPy$ であると定義し，個人 1 が xP_1yI_1z，2 が yP_2xP_2z，3 が xI_3yI_3z という選好を持っているときに社会的に $xIyPz$ であるとするなら（またそのときに限り），2 人の社会においても xP_1yI_1z，yP_2xP_2z のとき $xIyPz$ であると定義するわけである。個人 3 の選好が（すべて無差別という）特定のものに限られているので個人 1，2 の選好だけが社会的な選好に影響を与える。

個人 n の選好は上記のようなものに限定されているが，その他の $n-1$ 人については選好を限定していないのでこのようにして作った $n-1$ 人の社会における社会的選択ルールは条件 U を満たす。また，個人 n の選好を特定のものに限定したときの n 人の社会の社会的な選好がそのまま $n-1$ 人の社会的な選好となるので，完全合理性（完備性，反射性，推移性）と

条件 I が n 人の社会的な選好において成り立つのなら $n-1$ 人の社会的な選好においても成り立つ。

次に条件 P（パレート原理）について考える。n 人の社会的な選好においてはパレート原理が成り立つが，$n-1$ 人の社会的な選好においては成り立たないと仮定してみる。2 つの選択肢 x，y があり，ある選好の組み合わせ a において $n-1$ 番目までのすべての人々が y より x を好み $(xP_i^a y)$，個人 n は無差別 $(xI_n^a y)$ であるときに，（個人 n がすべて無差別という選好を持っているような）n 人の社会において，したがって上の定義から $n-1$ 人の社会においても社会的に $yR^a x$（x より y を好むか，または無差別）であるとしよう[12]。次に（個人 n についてすべてが無差別という選好には限定しない）n 人の社会において別の選択肢 z をとり，$n-1$ 番目までの人々が $xP_i^b zP_i^b y$，個人 n が $zP_n^b xI_n^b y$ という選好を持つような選好の組み合わせを b とする。選好の組み合わせ a においても b においても x と y についての選好は（n 人すべてについて）変わっていないので条件 I によって $yR^b x$ でなければならない。一方 n 人の社会における条件 P によって $zP^b y$ となる。したがって推移性によって $zP^b x$ でなければならない。しかし，選好の組み合わせ b においては個人 n だけが $zP_n^b x$ であり他の人々は $xP_i^b z$ であるから個人 n は x に対して z についてほとんど決定的であることになり，補助定理 3.1によって独裁者となる。これは n 人の社会の社会的選択ルールに独裁者がいない（条件 D）という仮定と矛盾するので $n-1$ 人の社会においても条件 P が成り立たなければならない。

最後に条件 D を考える。ここでもこの補助定理の主張とは逆に $n-1$ 人の社会に独裁者がいるものと仮定しそれを個人 i とする[13]。2 つの選択肢 x，y をとり，ある選好の組み合わせ a において個人 i が $xP_i^a y$，$n-1$ 番目までのそれ以外の人々（個人 j で代表させる）が $yP_j^a x$ という選好を持つとする（個人 n は $xI_n^a y$）。個人 i は独裁者であるから $n-1$ 人の社会において，したがって定義によって（個人 n がすべて無差別という選好を持っているような）n 人の社会において社会的に $xP^a y$ である。次に（個人 n についてすべてが無差別という選好には限定しない）n 人の社会において x，y 以外の互いに異なる 2 つの選択肢 z，w をとり，個人 i が $xP_i^b yP_i^b zP_i^b w$，個人 n が $wP_n^b xI_n yP_n^b z$，それ以外の人々（j で表す）が $yP_j^b zP_j wP_j^b x$ という選好を持つような選好の組み合わせを b とする。選好の組み合わせ a においても b においても x と y についての選好は（n 人すべてについて）変わっていないので条件 I によって $xP^b y$ でなければならない。一方 n 人の社会における条件 P によって $yP^b z$ となる。したがって推移性によって $xP^b z$ が得られる。x と w については完備性によって社会的に $xP^b w$ であるか $wR^b x$（$wP^b x$ または $wI^b x$）でなければならない。$xP^b w$ であるとすると，w より x を好むのは個人 i のみで他の人々はすべて x より w を好むから条件 P の証明と同じように補助定理 3.1から個人 i は n 人の社会における独裁者となってしまう。逆に $wR^b x$ であるとすると $xP^b z$ より推移性によって $wP^b z$ を得る。しかし，z より w を好むのは個人 n のみで他の人々はすべて w より z を好むから今度は個人 n が n 人の社会における独裁者となってしまう。これらは n 人の社会において独裁者がいないという仮定と矛盾する。

選択肢が 3 つしかない場合には以下のように証明を進める。x，y 以外の選択肢を z として，個人 i が $xP_i^b yP_i^b z$，個人 n が $zP_n^b xI_n^b y$，それ以外の人々（j で表すと）が $yP_j^b zP_j^b x$ という選好を持つような選好の組み合わせを b とする。a においても b においても x と y についての選好は（n 人すべてについて）変わっていないので条件 I によって $xP^b y$ でなければならない。

[12]これが $n-1$ 人の社会においてパレート原理が成り立たないとの仮定である。

[13]個人 i は n とは異なるものとする。適当に番号をつければよい。$n-1$ 人の社会を考える際，n 人の社会から除かれる人は誰でもよい。$n-1$ 人の社会においてある個人がすべてに無差別な選好を持つという仮定は条件 U によってどの個人についても可能である。

一方 x と z については完備性によって社会的に xP^bz であるか zR^bx（zP^bx または zI^bx）でなければならない。xP^bz であるとすると，z より x を好むのは個人 i のみで他の人々はすべて x より z を好むから補助定理 3.1によって個人 i は n 人の社会における独裁者となってしまう。逆に zR^bx であるとすると xP^by より推移性によって zP^by を得る。しかし，y より z を好むのは個人 n のみで他の人々はすべて z より y を好むから今度は個人 n が n 人の社会における独裁者となってしまう。これらは n 人の社会において独裁者がいないという仮定と矛盾する。

以上のことから $n-1$ 人の社会においても独裁者はいない。 □

上で述べたようにこの論理を繰り返し使うと，3 人以上の n 人の社会においてアローの定理のすべての条件を満たす社会的選択ルールがあれば 2 人の社会においてもそのような社会的選択ルールが存在しなければならない。しかし

補助定理 3.3. 2 人からなる社会にはアローの定理のすべての条件を満たす社会的選択ルールはない。

証明. 個人 1，2 からなる社会において 2 つの選択肢 x，y をとる。ある選好の組み合わせ a において 2 人の選好がそれぞれ xP_1^ay，yP_2^ax であるとする。完備性により社会的に xR^ay か yP^ax のいずれかである。もし yP^ax であれば補助定理 3.1によって個人 2 が独裁者になってしまう。xR^ay であるとして第 3 の選択肢 z をとり $xP_1^byP_1^bz$，$yP_2^bzP_2^bx$ という選好の組み合わせ b を考える。条件 I と P によって xR^by，yP^bz であり，推移性によって xP^bz を得る。しかし，そのときやはり補助定理 3.1によって個人 1 が独裁者になってしまう。したがってアローの定理のすべての条件を満たす社会的選択ルールはないことが示された。 □

以上で証明が終わった。

4　アローの一般可能性定理の簡単な例

選択肢の数が 3 で社会を構成する人々が 2 人の場合を考えてみよう。3 つの選択肢を x，y，z，2 人の個人を A，B で表す。また議論を簡単にするために個人の選好において無差別な関係はないものとする。そうすると 1 人の人の 3 つの選択肢に関する選好は 6 通りあるから，2 人の人の選好の組み合わせは 36 通りである。そのすべてを検討するのではなくいくつかの場合を考えることによってアローの定理が成り立つことを確認する。

まず次のような選好を考える。

個人 A：xP_AyP_Az
個人 B：xP_BzP_By

これを単純化して

個人 A：xyz
個人 B：xzy

と表すことにする。

パレート原理によって社会の選好は xPy，xPz である。しかし y と z についてはどちらとも言えない。(1) yPz，(2) zPy，(3) yIz の 3 つの可能性が考えられるが，(1) の場合には個

人 A が，(2) の場合には個人 B が独裁者であることが示される。また (3) のケースは起こりえない。最初に (1) のケースを考えよう。上の場合に yPz になるということは yP_Az，zP_By であるから，条件 I によって個人 A が z に対して y についてほとんど決定的であることを意味する[14]。そこで次のような選好を考えてみよう。

個人 A：yzx
個人 B：zxy または zyx

いずれの場合も個人 A が z に対して y についてほとんど決定的であることから yPz，パレート原理によって zPx となり推移性によって yPx を得る。条件 I によって，これは個人 A が x に対して y について決定的であることを意味する[15]。次に

個人 A：xyz
個人 B：xzy または zxy

という選好を考える。いずれの場合も個人 A が z に対して y についてほとんど決定的であることから yPz，パレート原理によって xPy となり推移性によって xPz を得る。これは個人 A が z に対して x について決定的であることを意味する。次に

個人 A：yxz
個人 B：xzy または xyz

という選好を考える。いずれの場合も個人 A が x に対して y について決定的であることから yPx，パレート原理によって xPz となり推移性によって yPz を得る。これは個人 A が z に対して y について決定的であることを意味する。次に

個人 A：zyx
個人 B：zxy または xzy

という選好を考える。いずれの場合も個人 A が x に対して y について決定的であることから yPx，パレート原理によって zPy となり推移性によって zPx を得る。これは個人 A が x に対して z について決定的であることを意味する。次に

個人 A：zxy
個人 B：xzy または xyz

という選好を考える。いずれの場合も個人 A が x に対して z について決定的であることから zPx，パレート原理によって xPy となり推移性によって zPy を得る。これは個人 A が y に対して z について決定的であることを意味する。次に

個人 A：xzy
個人 B：yxz または xyz

という選好を考える。いずれの場合も個人 A が y に対して z について決定的であることから zPy，パレート原理によって xPz となり推移性によって xPy を得る。これは個人 A が y に対して x について決定的であることを意味する。

[14] 条件 I によって y と z についての社会的選好は y と z に関する個人の選好によって決まるので，yP_Az，zP_By である限り yPz となる。

[15] 条件 I によって x と y についての社会的選好は x と y に関する個人の選好によって決まるので，yP_Ax である限り yPx となる。以下同様。

以上によって個人 A は x，y，z のすべての組み合わせについて決定的であることが示されたから独裁者である。

(2) のケースについては (1) のケースと同様にして個人 B が独裁者であることが示される。

最後に (3) のケース，すなわち yIz となることがありえないことを示す。yP_Az，zP_By のときに yIz であると仮定し次のような選好を考える。

個人 A：yzx
個人 B：zxy または zyx

パレート原理によって zPx であり，yIz と合わせて推移性によって yPx を得る。これは個人 A が x に対して y について決定的であることを意味する。次に

個人 A：yxz
個人 B：xzy

という選好を考える。個人 A が x に対して y について決定的であることから yPx，パレート原理によって xPz となり推移性によって yPz を得る。しかしこれは yP_Az，zP_By のときに yIz であるという仮定と矛盾する。よって yIz となることはありえない。

以上で選択肢が 3 つ，人々の人数が 2 人で個人の選好に無差別な関係を含まない場合のアローの定理が証明された。パレート原理（条件 P），条件 I，そして推移性を課すことが独裁者の存在を不可避にしているのである。

5　アローの一般可能性定理の別の証明

アローの一般可能性定理の別の証明を試みる。前節で証明した補助定理 3.1『社会的選択ルールが完全合理性，条件 U，P，I を満たし，またある 2 つの選択肢 x，y に関して，y に対して x についてほとんど決定的であるような個人が存在するならば，その個人は 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的である，すなわち独裁者である。』を用いる。人数 n は 2 以上，選択肢の数は 3 以上のそれぞれ有限な整数であると仮定する。

まず次の補助定理を示す。

補助定理 5.1.　(1) 社会的選択ルールは完全合理性を満たし独裁者はいない（条件 D を満たす）ものとする。そのとき任意の（特定のものではなく，適当にあるいは無作為に選んだ）2 つの選択肢 x，y について $n-1$ 人の人々が xP_iy という選好を持ち，1 人の人が yP_ix という選好を持っているときには社会的に xRy である。

(2) 社会的選択ルールは完全合理性，条件 U，I を満たし，独裁者はいないものとする。任意の 2 つの選択肢 x，y について $n-k$ 人の人々が xP_iy，k 人の人々が yP_ix という選好を持っているときに社会的に xRy であるならば $n-k-1$ 人の人々が xP_iy，$k+1$ 人の人々が yP_ix という選好を持っているときにも xRy である。ただし k は正の整数で $1 \leq k \leq n-1$ である。

証明.　(1) もし他のすべての人々が xP_iy で 1 人だけが yP_ix のときに yPx となるような選択肢の組 (x, y) があるならば，その 1 人の人は x に対して y についてほとんど決定的となり補助定理 3.1によって独裁者となってしまうから，そのような選択肢の組があってはならない。

(2) 任意に 3 つの選択肢 x，y，z を選び，次のような選好の組み合わせを考える。

(i) $n-k-1$ 人の人々：xP_iyP_iz

(ii) 1 人の人：zP_ixP_iy

(iii) 1 人の人：yP_izP_ix

(iv) $k-1$ 人の人：zP_iyP_ix

$n-k$ 人の人々が xP_iy で k 人が yP_ix，同じく $n-k$ 人の人々が yP_iz で k 人が zP_iy であるから仮定により xRy，yRz となる。したがって推移性によって xRz を得る。このとき xP_iz という選好を持つ人は $n-k-1$ 人，zP_ix という選好を持つ人は $k+1$ 人である。x，y，z は任意であるから補助定理の主張が成り立つ。

□

これは k が $n-1$ の場合にも成り立つことに注意されたい。

この補助定理によって次の形のアローの定理が証明される。

定理 5.1 (アローの一般可能性定理（再）). 完備性，反射性，条件 U，P，I を満たし，独裁者がいない社会的選択ルールは推移性を満たさない。

証明. もし推移性が満たされるとするなら，補助定理 5.1の (1) から出発して (2) を繰り返し適用して行くと，$k=n-1$ の場合に n 人全員が yP_ix のときに xRy であることになる。これは条件 P（パレート原理）に反するから矛盾である。 □

以上で証明が終わった。

6 単純多数決ルールについて

6.1 準推移性について

アローの一般可能性定理においては社会的選択ルールは完全合理性（完備性，反射性，推移性）を満たすものとの条件がついていた。この推移性というのは R の推移性のことである。定理 1.1で示したように R の推移性は P，I，P と I，および I と P の推移性を意味する。完全合理性の条件をもう少し弱くした場合にはどうなるであろうか。

P の推移性だけを満たし I の推移性（および P と I，I と P の推移性）は満たさなくてもよいというような，より弱い条件を考え，これを**準推移性 (quasi-transitivity)** と呼ぶ。また完備性，反射性，準推移性を合わせたものを**準完全合理性**と呼ぶことにする。

完全な推移性が満たされなければ複数の選択肢に矛盾なく順序をつけることはできないが，選択肢の中から最良のもの（1 つとは限らない）を選ぶことはできる。

定理 6.1. 社会的な選好 R が完備性，反射性，準推移性（P のみの推移性）を満たせば複数の選択肢の中から最良のものを選び出すことができる。

証明. 集合 A の中に $m(m \geq 3)$ 個の選択肢 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ があるとする。初めに 2 つの選択肢 (x_1, x_2) を考える。R の完備性によりこの 2 つは比較可能でありいずれか 1 つあるいは両方が最良である。以下の証明は数学的帰納法によって行う[16]。

さて，$k(k \geq 2)$ 個の選択肢 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ の中に最良のものがあると仮定する。それ（複数あればその内の 1 つ）を a_k で表す。すると a_k は最良であるから $l = 1, 2, \cdots, k$ に対して $a_k R x_l$ が成り立つ。次に x_{k+1} を考えると，$a_k R x_{k+1}$ あるいは $x_{k+1} P a_k$ のいずれかである（R の完備性により）。もし前者ならば a_k は $k+1$ 個の選択肢の中で最良となる。もし後者ならばある $l = 1, 2, \cdots, k$ に対して $x_l P x_{k+1}$ のときにのみ x_{k+1} は $k+1$ 個の選択肢の中で最良とはならない（それ以外の場合は x_{k+1} が $k+1$ 個の選択肢の中で最良となる)。しかしそのとき，P の推移性（R の準推移性）によって $x_l P a_k$（$x_l P x_{k+1}$ かつ $x_{k+1} P a_k$ であるから）でなければならないが，これは a_k が k 個の選択肢の中で最良であるとの仮定と矛盾する。よって $k+1$ 個の選択肢の中に最良のものが存在するから数学的帰納法によって全体（m 個の選択肢）の中に最良のものが存在する。 □

したがって P の推移性さえ満たされれば社会的な選択は可能である。P の推移性だけを満たすというのは xPy かつ yPz ならば xPz でなければならないが，xIy かつ yIz であっても xIz でなければならないとは求めず，xPz あるいは zPx となることを許す。また xPy かつ yIz（あるいは xIy かつ yPz）であっても xPz でなければならないとは求めず xIz あるいは zPx となることを許すということである。

6.2 匿名性，中立性，正の反応性

先に単純多数決ルールでは推移性が成り立たない可能性があるので完全合理性を満たさないことを見たが（以降『単純』という語をつけない)，一方で多数決ルールはアローの定理では触れられていないいくつかの望ましい条件を満たす。また人々の選好が（ある種の基準で）ある程度似通っていたり，逆に極端に対立する状況にあれば多数決ルールが準推移性（P の推移性）あるいは推移性を満たすことも知られている。多数決ルールは実際に最もよく用いられている方法なのでこの節ではこれらの問題について考えてみよう。前半では条件 U を仮定する。後半で人々の選好が似通っている場合などを考えるときには条件 U を緩めることになる。

まず望ましい条件とは以下のようなものである。

条件 A：匿名性 (anonymity) すべての個人を対等に扱うような社会的選択ルールは匿名性を満たすと言われる。これは人々の選好の組み合わせが同じならば誰がどの選好を持っていても社会的選好は変わらないということである。

条件 N：中立性 (neutrality) 社会的選択ルールが『ある選好の組み合わせ a における選択肢 x と y についての各個人の選好と，別の選好の組み合わせ b（b と a が同一の選好の組み合わせである場合も含む）における選択肢 z と w についての各個人の選好とが同じであれば，a における x と y についての社会的選好と b における z と w についての社会的選好とは同じである』という条件を満たすとき中立性を満たすと言う。記号で書けば

[16] 数学的帰納法とは，ある命題が $n = 1$（または 2）の場合に成り立つことを確認した上で $n = k$ の場合に成り立つと仮定し，その仮定のもとで $n = k + 1$ の場合に成り立つことを示すことによってあらゆる正の整数 n（または 2 以上の整数）について成り立つことを証明する方法である。

aにおいて$xP_i^a y$である人がbにおいて$zP_i^b w$であり，$yP_i^a x$である人が$wP_i^b z$，$xI_i^a y$である人が$zI_i^b w$であるとすると，社会的に$xP^a y$ならば$zP^b w$，$yP^a x$ならば$yP^b x$，$xI^a y$ならば$zI^b w$である。

ということである。zとwがそれぞれxとyに一致する場合，あるいはyとxに一致する場合，一方だけがx，yのいずれかと一致する場合も含む。

条件S：正の反応性 (positive responsiveness) 2つの選択肢xとyについて，ある人の選好がyよりもxを好む方向に変化し（$yP_i x$から$xI_i y$または$xP_i y$へ，あるいは$xI_i y$から$xP_i y$へ）他の人々の選好が変わらないとき，変化する前の社会的選好においてxとyが無差別であればyよりもxを好む選好に（xIyからxPyに）変化しなければならない。また変化する前にyよりもxを好む選好（xPy）であれば変化した後もそうである。

1人1票の多数決ルールは明らかに匿名性を満たす。人々の選好が異なるときに全員が独裁者であることはできないので独裁的なルールは匿名性を満たさない。また国連安全保障理事会のように一部の国にだけ拒否権が与えられているようなルールも匿名性を満たさない。しかし全員に拒否権が与えられているルールは匿名性を満たす可能性がある。

中立性はすべての選択肢を対等に扱うということを意味するが，この条件は条件I（無関係な選択対象からの独立性）を意味している。

補助定理 6.1. 条件N（中立性）を満たす社会的選択ルールは条件Iを満たす。

証明. 上の中立性の定義においてz，wがそれぞれx，yと同一であると考えてみる。そうすると中立性の定義においてはx，yとそれ以外の選択肢との間の選好にはまったく触れていないのでそれが変化してもxとyに関する社会的選好は変わらないことになるから条件Iが満たされる。 □

多数決ルールはyよりxを好む人とxよりyを好む人の数に応じて社会的にどちらを好むかを決めるルールであるから，xとyをzとwに置き換えても同じことが言えるので中立性を満たしている。またxとyが同点の状態で1人の選好が$yP_i x$から$xI_i y$に，あるいは$xI_i y$から$xP_i y$に変わればxの支持者が1人増えるかyの支持者が1人減るので明らかに正の反応性を満たす。

さて多数決ルールは以上の条件を満たすことがわかったが他にそのようなルールはあるのだろうか。実はないのである。

定理 6.2. 条件U，A，N，Sを満たす社会的選択ルールは『単純』多数決ルールのみである。

証明. まず条件N（中立性）は条件Iを意味するので，選択肢x，yに関する社会的選好はこの2つについての個人の選好のみによって決まらなければならない。また条件A（匿名性）によって誰がyよりxを好むかあるいはxよりyを好むかということを考慮に入れてはならない，したがって条件A，Nを満たす社会的選択ルールはyよりxを好む人，xよりyを好む人，無差別である人の人数によって社会的選好を決めなければならない。これで多数決にだいぶ近づいた。しかし人数のみによって決めると言っても3分の2や4分の3以上の賛成を求めるなどのルールもあるのでこれだけでは『単純』多数決にはならない。

再び条件 N によって，y より x を好む人と x より y を好む人の数が同じであれば社会的に両者は無差別（xIy）でなければならない。なぜならば，中立性は x と y とを入れ替えたときには社会的選好においても入れ替わらなければならないことを意味するが，同数であれば入れ替えてもやはり同数であるから人数のみによって決まる社会的選好が変わってはならず無差別であるしかない[17]。x と y が同点の状態で 1 人の選好が，条件 S（正の反応性）の定義の中の説明と同じようにして y より x を好む方向に変わったとしてみよう。すると条件 S によって社会的にも y より x を好む方向に変わらなければならない。これは単純多数決に他ならない。 □

6.3　価値制限と準推移性

次に人々の選好がある程度似通っていれば多数決ルールが準推移性を満たす可能性について考えてみよう。『ある程度似通っている』というのは次のように表せる。

価値制限 (value restriction) ある 3 つの選択肢の組 (x, y, z) について，『すべての選択肢について無差別であるような人々』（**関与しない人々**と呼ぶ）を除いてすべての人々が**いずれかは最良でない**，**いずれかは中間でない**，**いずれかは最悪でない**ということについて同意するならばその 3 つの選択肢の組について**価値制限**が成り立つと言う。

例えば個人 1，2，3 が x，y，z について xP_1yP_1z，yP_2zP_2x，zP_3yP_3x という選好を持つならば y が最悪ではないということについて同意している。このとき 2 つづつを多数決によって比較すれば yPz，zPx，yPx となり準推移性を満たしている。この例は先に見た投票のパラドックスの例（xP_1yP_1z，yP_2zP_2x，zP_3xP_3y）の内で個人 3 の x と y に関する選好を逆にしただけであるから，かなりの程度に意見の相違を認めるものである。多数決も捨てたものではない。

この価値制限について次のことが言える。

補助定理 6.2. ある 3 つの選択肢の組 (x, y, z) について価値制限が成り立つ場合，次の 6 つの主張の内，(1)〜(3) の少なくとも 1 つ，および (4)〜(6) の少なくとも 1 つが成り立つ[18]。

(1) xR_iyR_iz である人は xI_iyI_iz である。

(2) yR_izR_ix である人は xI_iyI_iz である。

(3) zR_ixR_iy である人は xI_iyI_iz である。

(4) yR_ixR_iz である人は xI_iyI_iz である。

(5) xR_izR_iy である人は xI_iyI_iz である。

(6) zR_iyR_ix である人は xI_iyI_iz である。

---

[17] xPy となるのに 3 分の 2 以上の人々が xP_iy でなければならないとし，一方 yPx となるには yP_ix である人々が 3 分の 1 を越えればよいというようなルールは中立性を満たさない。

[18] 価値制限の定義においては，例えば xP_iyI_iz という選好を持つ人は y と z を最悪とも中間とも考えていると解釈する。同様に xI_iyR_iz という選好を持つ人は x と y を最良とも中間とも考えている。

証明. 関与する（すべてに無差別ではない）人々について x が最良ではないとする。すると xR_iyR_iz または xR_izR_iy である人々は関与しないことになり xI_iyI_iz（すべてに無差別）でなければばならないから (1) と (5) が成り立つ。同様にして y が最良でなければ (2) と (4) が，z が最良でなければ (3) と (6) が成り立つ。関与する人々について x が最悪でなければ (2) と (6) が，y が最悪でなければ (3) と (5) が，z が最悪でなければ (1) と (4) が成り立つ。関与する人々について x が中間でなければ (3) と (4) が，y が中間でなければ (1) と (6) が，z が中間でなければ (2) と (5) が成り立つ。 □

ここで次の定理を得る。

定理 6.3. 完備性を満たす社会的選択ルールが条件 N（中立性），条件 S（正の反応性）そしてあらゆる 3 選択肢の組について価値制限を満たせば準推移性を満たす。

証明. ある 3 選択肢 x，y，z について準推移性が成り立たないとすれば次の 6 つの関係のいずれかが成り立つ。

$$xPy,\ yPz \text{ かつ } zRx, \quad yPz,\ zPx \text{ かつ } xRy$$

$$zPx,\ xPy \text{ かつ } yRz, \quad xPz,\ zPy \text{ かつ } yRx$$

$$yPx,\ xPz \text{ かつ } zRy, \quad zPy,\ yPx \text{ かつ } xRz$$

補助定理 18の (1)〜(3) の 1 つ，および (4)〜(6) の 1 つが成り立てばこのような関係はありえないことを示す。まず (1) を仮定してみる。関与する人々（xI_iyI_iz でない人々）は xR_iyR_iz ではないから，xR_iy ならば zP_iy，yR_iz ならば yP_ix でなければならない。したがって関与しない人々も含めて次の関係が成り立つ

$$xP_iy \text{ ならば } zP_iy,\ xI_iy \text{ ならば } zR_iy,\ yP_iz \text{ ならば } yP_ix,\ yI_iz \text{ ならば } yR_ix$$

中立性と正の反応性によって社会的には次の関係が成り立つ[19]

$$xRy \text{ ならば } zRy,\ yRz \text{ ならば } yRx$$

したがって

$$xRy \text{ かつ } yRz \text{ ならば } xRy,\ yRx,\ zRy,\ yRz$$

[19]

$$xP_iy \text{ ならば } zP_iy,\ xI_iy \text{ ならば } zI_iy$$

が成り立てば x と y の関係と z と y の関係が同じであるので，中立性によって社会的にも同じでなければならず

$$xPy \text{ ならば } zPy,\ xIy \text{ ならば } zIy$$

を得る。ここで zI_iy が zP_iy に変わる可能性があれば正の反応性によって

$$xPy \text{ ならば } zPy,\ xIy \text{ ならば } zRy$$

となる。これは『xRy ならば zRy』を意味する。同様にして

$$yP_iz \text{ ならば } yP_ix,\ yI_iz \text{ ならば } yR_ix$$

が成り立てば

$$yPz \text{ ならば } yPx,\ yIz \text{ ならば } yRx$$

となる。

すなわち

$$xRy \text{ かつ } yRz \text{ ならば } xIy \text{ かつ } yIz$$

が得られる。これに zRx という条件を加えると（zRx は x と y，y と z の間の選好には影響しない）

$$xRy,\ yRz \text{ かつ } zRx \text{ ならば } xIy \text{ かつ } yIz$$

を意味する。(2) が成り立つ場合は今の議論で x，y，z をそれぞれ y，z，x に入れ替えて

$$xRy,\ yRz \text{ かつ } zRx \text{ ならば } yIz \text{ かつ } zIx$$

が，(3) の場合は x，y，z をそれぞれ z，x，y に入れ替えて

$$xRy,\ yRz \text{ かつ } zRx \text{ ならば } zIx \text{ かつ } xIy$$

が得られる。したがって (1)，(2)，(3) のどれか 1 つが成り立つとき xRy，yRz かつ zRx ならば x，y，z の 2 つの組について無差別関係が成り立たなければならず

$$xPy,\ yPz \text{ かつ } zRx$$

$$yPz,\ zPx \text{ かつ } xRy$$

$$zPx,\ xPy \text{ かつ } yRz$$

の 3 つの関係はどれも成り立ち得ない。

(4) が成り立つときには (1) の場合の議論で x，y，z をそれぞれ y，x，z に入れ替えて

$$yRx \text{ かつ } xRz \text{ ならば } yIx \text{ かつ } xIz$$

を得る。これに zRy という条件を加えると（zRy は x と y，x と z の間の選好には影響しない）

$$yRx,\ xRz \text{ かつ } zRy \text{ ならば } yIx \text{ かつ } xIz$$

となる。(5) の場合は (4) の議論の y，x，z をそれぞれ x，z，y に入れ替えて

$$yRx,\ xRz \text{ かつ } zRy \text{ ならば } xIz \text{ かつ } zIy$$

を得る。(6) の場合は y，x，z をそれぞれ z，y，x に入れ替えて

$$yRx,\ xRz \text{ かつ } zRy \text{ ならば } zIy \text{ かつ } yIx$$

となる。したがって (4)，(5)，(6) のどれか 1 つが成り立つとき yRx，xRz かつ zRy ならば x，y，z の 2 つの組について無差別関係が成り立たなければならず

$$xPz,\ zPy \text{ かつ } yRx$$

$$yPx,\ xPz \text{ かつ } zRy$$

$$zPy,\ yPx \text{ かつ } xRz$$

の 3 つの関係は成り立ち得ない。よって準推移性が成り立つ。 □

単純多数決ルールは条件 N，S を満たすので価値制限が成り立てば準推移性を満たす[20]。

[20] なお人数が 2 人であれば単純多数決ルールは価値制限がなくても準推移性を満たす。xPy かつ yPz のときには 2 人のどちらもが xR_iy かつ yR_iz であり，少なくとも 1 人が xP_iy，同じく少なくとも 1 人が yP_iz である。したがって個人の選好の推移性から少なくとも 1 人が xP_iz という選好を持ち，zP_ix という選好を持つ人はいないので単純多数決によって xPz となる。しかし，xPy かつ yIz のときには 1 人が xP_iyP_iz，1 人が zP_iyI_ix という選好を持つことがあり得るが，そのとき推移性によって 1 人が xP_iz，1 人が zP_ix であるので xIz となり P と I の推移性は満たされない。

6.4 極値制限と推移性

次に人々の選好に対する価値制限とは別の制約について考えてみる。

極値制限 (extremal restriction) ある3つの選択肢の組 (x, y, z) について，ある人（個人 i とする）が xP_iyP_iz という選好を持っているとする。このとき z を唯一の最良な選択肢であると見なすすべての人々は x を唯一の最悪な選択肢であると見なしている，また x を唯一の最悪な選択肢であると見なすすべての人々は z を唯一の最良な選択肢であると見なしている，ということが x，y，z のいかなる順序についても成り立つならば[21]，その3つの選択肢の組について極値制限が成り立つと言う。

これはある人が x を最も好み z を最も好まない（最も嫌う）とき，もし誰かが z を最も好むならばその人は x を最も嫌わなければならず，誰かが x を最も嫌うならばその人は z を最も好まなければならないことを要求する。利害や意見の対立する人々がいるならば正反対の選好を持つことを求め，中途半端な選好（yP_izP_ix のような）は許さないという条件である。少々厳しい条件であるが，思想・宗教の違いなどで選択肢に対する人々の評価が対立的になっている場合には適当な制約であるかもしれない。

この極値制限と上で見た価値制限とはどちらがどちらを意味するというわけではなく独立したものである。

補助定理 6.3. 極値制限と価値制限とは独立した性質である。

証明. 例を上げる。

(1) 個人1，2，3，4の4人がいて xP_1yP_1z，zP_2yP_2x，yP_3xI_3z，xI_4zP_4y という選好を持っているとする。そうすると極値制限は成り立つ（xP_1yP_1z と zP_2yP_2x において）が，価値制限は成り立たない（x，y，z のいずれもが最良，最悪，中間となっている)。

(2) 個人1，2，3の3人がいて xP_1yP_1z，zP_2yP_2x，yP_3zP_3x という選好を持っているとする。そうすると極値制限は成り立たない（yP_3zP_3x と xP_1yP_1z において）が価値制限は成り立つ（3人とも y は最悪でない，また x は中間でないと考えている)。

□

しかし人々の選好が無差別な関係を含まない場合，すなわちあらゆる2つの選択肢の組について選好がはっきりしている場合には次のことが言える。

補助定理 6.4. 人々の選好が無差別な関係を含まない場合には極値制限が成り立てば価値制限も成り立つ（極値制限は価値制限を意味する)。

証明. ある個人 i について xP_iyP_iz であるとする。もし zP_jx であるような人々（j で代表させる）がいない（すべての人が xP_jz）とすると z を最良と見なさないとう点で一致し価値制限が成り立つ。一方 zP_jx であるような人がいるとすれば，その人は極値制限により zP_jyP_jx である[22]。そのときやはり極値制限によって xP_jz である人は xP_jyP_jz である。したがって人々の選好は xP_jyP_jz または zP_jyP_jx のいずれかであり，y が最良でない（あるいは最悪でない）という点で一致しているので価値制限が成り立つ。 □

[21] ある人が zP_ixP_iy という選好を持っているとすると，y を唯一の最良な選択肢であると見なすすべての人々は z を唯一の最悪な選択肢であると見なしている，また z を唯一の最悪な選択肢であると見なすすべての人々は y を唯一の最良な選択肢であると見なしている。他の順序も同様。

[22] yP_jzP_jx も zP_jxP_jy も極値制限に反する。

しかし，補助定理 6.3の 2 つ目の例からわかるように価値制限が成り立っても極値制限が成り立つとは限らない。

この極値制限と単純多数決について次の定理を示すことができる。

定理 6.4. 3 つの選択肢のあらゆる組について極値制限が成り立てば単純多数決は推移性を満たす。

証明. x，y，z の 3 選択肢についての個人の選好は以下の 13 通りある。

$$\begin{array}{l}
(1.1)\ xP_iyP_iz,\ (1.2)\ xP_iyI_iz,\ (1.3)\ xI_iyP_iz \\
(2.1)\ yP_izP_ix,\ (2.2)\ yP_izI_ix,\ (2.3)\ yI_izP_ix \\
(3.1)\ zP_ixP_iy,\ (3.2)\ zP_ixI_iy,\ (3.3)\ zI_ixP_iy \\
(4)\quad xP_izP_iy,\ (5)\quad zP_iyP_ix,\ (6)\quad yP_ixP_iz \\
(7)\quad xI_iyI_iz
\end{array}$$

これらの内無差別関係を 1 つでも含むものについては極値制限を議論する余地はなく（xP_iyP_iz のような選好がない）明らかに成り立っている。全員がそのような選好を持つ場合には推移性が成り立つことを示そう。(1.2)，(1.3)，(2.2)，(2.3)，(3.2)，(3.3)，(7) の選好を持つ人々の人数を $N(1.2)$ などで表すことにすると xRy（単純多数決で社会的に y より x が選好されるか無差別）かつ yRz のとき

$$N(1.2) + N(3.3) \geq N(2.2) + N(2.3)$$

および

$$N(1.3) + N(2.2) \geq N(3.2) + N(3.3)$$

が成り立つ。この両式を辺々（左辺同志，右辺同志）加えると

$$N(1.2) + N(1.3) \geq N(2.3) + N(3.2)$$

が得られる。これは xRz を意味するから推移性が成り立つ。

以下，少なくとも 1 人が無差別関係を含まない選好を持つとする。xP_iyP_iz という選好を持つ人がいると仮定し，極値制限が成り立っていて社会的選好が推移性を満たさないと考えてみる[23]。まず xP_iyP_iz についての極値制限によって 13 通りの選好の内で (2.1)，(2.3)，(3.1)，(3.2) が排除される[24]。つまり極値制限が成り立つならばそのような選好を持つ人がいてはならない。

推移性が成り立たないとすると以下の 6 つの関係のいずれか (少なくとも 1 つ) が成り立つ。

(1) xRy かつ yRz であるが zPx である。

(2) zRx かつ xRy であるが yPz である。

(3) yRz かつ zRx であるが xPy である。

[23] xP_iyP_iz 以外の選好，例えば yP_izP_ix という選好を持つ人がいると仮定する場合は x，y，z をそれぞれ y，z，x に入れ替えて議論を進めることによって定理が証明される。

[24] x が唯一最悪ならば z が唯一最良，z が唯一最良ならば x が唯一最悪でなければならない。

(4) yRx かつ xRz であるが zPy である。

(5) zRy かつ yRx であるが xPz である。

(6) xRz かつ zRy であるが yPx である。

初めの 3 つのケースのいずれかが成り立てば zRx でなければならない。xP_iy という選好を持つ人の数を $N(xP_iy)$ などで表すと，zRx のときには $N(zP_ix) \geq N(xP_iz)$ であるが，xP_iyP_iz という人が少なくとも 1 人はいるから zP_ix という選好を持つ人が少なくとも 1 人はいなければならない。極値制限よりそのような人は zP_iyP_ix という選好を持つ。

次に後半の 3 つのケースのいずれかが成り立てば zRy と yRx が成り立っていなければならない。このとき $N(zP_iy) \geq N(yP_iz)$，$N(yP_ix) \geq N(xP_iy)$ であるが 4 つの選好が排除されていることを考えるとこれらは以下のように表せる。

$$N(3.3) + N(4) + N(5) \geq N(1.1) + N(1.3) + N(2.2) + N(6)$$

$$N(2.2) + N(5) + N(6) \geq N(1.1) + N(1.2) + N(3.3) + N(4)$$

両式を辺々加えると

$$2N(5) \geq 2N(1.1) + N(1.2) + N(1.3)$$

が得られる。仮定によって $N(1.1) \geq 1$（xP_iyP_iz という選好を持つ人が 1 人はいる）であるから $N(5) \geq 1$ を得る。以上によって (1)〜(6) のいずれかが成り立てば zP_iyP_ix という選好を持つ人が少なくとも 1 人はいなければならない。この zP_iyP_ix に極値制限を適用すると (1.2)，(1.3)，(4)，(6) の 4 つの選好が排除される[25]。したがって人々の選好は (1.1)，(2.2)，(3.3)，(5)，(7) に限られるが (7) は多数決の結果に影響を及ぼさないので初めの 4 つに限定してよい。その上で推移性を満たさない 6 つのケースについて考えてみよう。

(1) xRy かつ yRz であれば

$$N(1.1) + N(3.3) \geq N(2.2) + N(5)$$

$$N(1.1) + N(2.2) \geq N(3.3) + N(5)$$

である。両式を辺々加えると

$$N(1.1) \geq N(5)$$

が得られる。これは xRz を意味する。したがって zPx とはならず推移性が成り立つ。

(2) zRx かつ xRy であれば

$$N(5) \geq N(1.1)$$

$$N(1.1) + N(3.3) \geq N(2.2) + N(5)$$

である。上の方の式の両辺を 2 倍して辺々加えると

$$N(5) + N(3.3) \geq N(1.1) + N(2.2)$$

が得られる。これは zRy を意味する。したがって yPz とはならず推移性が成り立つ。

[25] z が唯一最悪ならば x が唯一最良，x が唯一最良ならば z が唯一最悪でなければならない。

(3) 同様（各自確認していただきたい）。

(4) yRx かつ xRz であれば

$$N(2.2) + N(5) \geq N(1.1) + N(3.3)$$

$$N(1.1) \geq N(5)$$

である。下の方の式の両辺を 2 倍して辺々加えると

$$N(1.1) + N(2.2) \geq N(3.3) + N(5)$$

が得られる。これは yRz を意味する。したがって zPy とはならず推移性が成り立つ。

(5) zRy かつ yRx であれば

$$N(3.3) + N(5) \geq N(1.1) + N(2.2)$$

$$N(2.2) + N(5) \geq N(1.1) + N(3.3)$$

である。両式を辺々加えると

$$N(5) \geq N(1.1)$$

が得られる。これは zRx を意味する。したがって xPz とはならず推移性が成り立つ。

(6) 同様（各自確認していただきたい）。

□

この結論は単純多数決について成り立つだけであり，その他のルールについては（条件 N（中立性）が満たされたとしても）必ずしも成り立たない。

7 寡頭制定理

推移性を準推移性に弱めた場合アローの一般可能性定理はどうなるのであろうか。その場合その他の条件を満たす（つまり独裁的でない）社会的選択ルールが存在する。しかしそれは拒否権者の存在という望ましくない性質を持つことが言えるのである。

7.1 拒否権者と寡頭支配グループ

この節の表題にある寡頭制とは寡頭支配グループの存在を意味するが，拒否権者および寡頭支配グループは以下のように定義される。

拒否権者 (vetoer) あらゆる選択肢の組み合わせ $(x,\ y)$ について，ある個人 i が y より x を好む (xP_iy) とき，社会的に x より y が選好される (yPx) ことはない，すなわち社会的に y より x が選好されるかまたは両者が無差別である (xRy) ならば個人 i は拒否権者である。

独裁者は 1 人に限られるが拒否権者は 1 人とは限らない。全員が拒否権者になることもあり得る。

寡頭支配グループ (oligarchy) 全体の集合 N に含まれる個人のグループ V があらゆる選択肢の組み合わせについて決定的であり，かつ V に属する個人 1 人 1 人が拒否権者となるような場合 V を寡頭支配グループと呼ぶ。

寡頭支配グループは全体の集合と一致することもあり，個人の場合もあり得る。後者のときその個人は独裁者である。

7.2 寡頭制定理の証明

まず初めに補助定理 3.1の証明をよく見ると，そこでは P の推移性だけが用いられており，I，I と P，P と I の推移性は用いられていない。したがってこの補助定理は準推移性の仮定のもとでも成り立つ。また個人 J を個人ではなく何人かの人々からなるグループと見ても同じ結論が成り立つ[26]。それを別の補助定理として述べておこう。

補助定理 7.1. 社会的選択ルールが準完全合理性，条件 U，P，I を満たし，ある 2 つの選択肢 x，y に関して，y に対して x についてほとんど決定的であるようなグループ V が存在するならば V は 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的である。

準推移性の仮定のもとで，ある選択肢の組についてほとんど決定的であるようなグループがあればそのグループは選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的となるわけである。そのようなグループを『決定的なグループ』と呼ぶことにする。

寡頭制定理は次のように表現される。

定理 7.1 (寡頭制定理). 準完全合理性（完備性，反射性，準推移性），条件 U，P，I，D を満たす社会的選択ルールには寡頭支配グループが存在する。

条件 P によって，あらゆる選択肢の組み合わせ (x,y) についてすべての人々が xP_iy ならば xPy となるから全体の集合は決定的である。したがって決定的なグループが少なくとも 1 つは存在する。ということは最も小さい（最も人数が少ない）決定的なグループが存在することを意味する。それは全員からなる集合そのものかもしれないし，1 人の個人かもしれない。後者の場合その個人は独裁者である。以上の事実をもとに次の寡頭支配グループに関する補助定理を示す。

補助定理 7.2. (1) 決定的なグループのすべては，最も小さい決定的なグループのすべての人々を含んでいる。

[26]ある 2 つの選択肢の組 $(x,\ y)$ について，y に対して x についてほとんど決定的なグループ V をとり以下のような選好を考えて証明を進めることができる。

(1) グループ V の人々：xP_iyP_iz

(2) それ以外のすべての人々：yP_ix，yP_iz

および

(1) グループ V の人々：zP_ixP_iy

(2) それ以外のすべての人々：zP_ix，yP_ix

(2) 最も小さい決定的なグループはただ１つである。

証明. (1) 最も小さい決定的なグループの１つを V_1 とし，V_1 以外の決定的なグループの１つを V_2 とする。この補助定理は V_2 が V_1 を含むか，さもなくば２つの集合は同一であることを主張するものである。まず V_1，V_2 が互いにまったく異なる（共通な人々を含まない）集合同士ではありえないことが言える。なぜならば V_1，V_2 に属する人々が異なる好み（xP_iy と yP_ix など）を持っているときにはともに決定的とはなり得ない。次に V_1 と V_2 は交わっている（共通の人々を含む）が V_2 が V_1 を含んでいないと仮定してみよう。そのとき２つの集合に共通の人々からなる集合（V_3 とする）が決定的である。それを示すために任意に３つの選択肢 x，y，z をとり以下のような選好の組み合わせを考える。

(i) V_3 の人々：xP_iyP_iz

(ii) V_3 以外の V_1 の人々：yP_izP_ix

(iii) それ以外（V_3 以外の V_2 の人々を含む）：zP_ixP_iy

V_1 は決定的であるから yPz である。また V_2 も決定的であるから xPy である。したがって P の推移性によって xPz を得る。そのとき V_3 の人々のみが z より x を好み，その他の人々は x より z を好んでいる。したがって V_3 は z に対して x についてほとんど決定的となり，補助定理 7.1によってあらゆる選択肢の組み合わせについて決定的である。V_3 は V_1 と一致しない限り V_1 より小さいので，上の結果は V_1 が最も小さい決定的なグループであるという仮定と矛盾する。したがって V_1 は V_2 に含まれなければならない。

(2) (1) より明らか。

□

この補助定理によって寡頭制定理が証明される。

寡頭制定理の証明. 補助定理 7.2によって最も小さい決定的なグループはただ１つであることがわかったがそれが寡頭支配グループとなることを示す。そのグループの内の１人（個人 i とする）が拒否権者でないと仮定してみよう。そうするとある (x, y) について個人 i のみが xP_iy という選好を持ち，それ以外のすべての人々が yP_ix という選好を持っているときに xRy とはならず yPx となるような選択肢の組み合わせがある。そのとき個人 i を除くすべての人々からなるグループは補助定理 7.1によってあらゆる選択肢の組み合わせについて決定的となる。しかしこれは補助定理 7.2の (1) と矛盾する。よって最も小さい決定的なグループに属するすべての人々は拒否権を持つ。 □

以上で証明が終わった。

準完全合理性を満たし独裁者のいない１つのルールを考えてみよう。

パレート拡張ルール (Pareto extension rule) このルールは以下のように定義される。

ある２つの選択肢 x，y について

(1) すべての人々が y より x を好むかまたは無差別であり (xR_iy)，かつ少なくとも１人が厳密に y より x を好む (xP_iy) ならば社会的に y より x を選好する (xPy)。

(2) すべての人々が x と y について無差別であれば (xI_iy) 社会的にも x と y は無差別であるとする (xIy)

(3) 厳密に y より x を好む (xP_iy) 人と，逆に厳密に x より y を好む (yP_ix) 人が両方いる場合には，その人数に関係なく社会的には x と y は無差別であるとする (xIy)

単なるパレートルールというのは (1) と (2) を求めるだけであるが，そうすると人々の意見が対立するときに判断できなくなり完備性を満たさない。パレート拡張ルールではそのような場合には両方の選択肢が無差別であるとすることによって完備性が満たされている。

全員の選好が一致すればそれが社会の選好ともなるのでこのルールはパレート原理を満たす，また 1 人の人の意見がそのまま通ることはない（誰であれ xP_iy ならば xPy となるとは限らない）ので独裁者はいない。しかし誰かが xP_iy であるとすると，社会的に yPx とは絶対にならない（xPy または xIy，すなわち xRy となる）ので全員が拒否権者である。このルールのもとにおいては，ある問題について賛成，反対の人がそれぞれ少なくとも 1 人づついれば社会的に無差別となり物事を決めることができない。

7.3 アローの一般可能性定理のさらに別の証明

以上の議論にもとづいてアローの一般可能性定理を導くことができる。

定理 7.2 (アローの一般可能性定理（再々）). 社会的選択ルールが推移性を満たすならば寡頭支配グループは 1 人の個人からなる。したがって独裁者が存在する。

証明. 寡頭支配グループを V で表す。V が 2 人以上の人からなると仮定してみよう。その内の 1 人を個人 i とし，任意に 3 つの選択肢をとって以下のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人 i：xP_iyP_iz

(2) 個人 i 以外の V の人々：zP_ixP_iy

(3) それ以外：yP_izP_ix

V は決定的なので xPy となる。ここでもし zPy ならば y より z を好むのは個人 i 以外の V の人々だけなので補助定理 7.1によって個人 i を除く V の人々のグループがあらゆる選択肢の組み合わせについて決定的となる。これは V が最小の決定的なグループであるという仮定と矛盾するから yRz でなければならない。すると推移性（P の推移性および P と I の推移性）によって xPz を得る。今度は z より x を好むのは個人 i だけであるから補助定理 3.1によって個人 i は独裁者となってしまう。これも V が最小の決定的なグループであるという仮定と矛盾する。したがってそもそも V は 1 人の個人によって構成される。すなわち独裁者が存在する。 □

8 戦略的操作不可能性とギバード・サタースウェイトの定理

8.1 戦略的操作不可能性

ここまで考えてきた社会的選択ルールは，個人の選好を集計して社会の選好に移すルールであった[27]。社会の選好とは 2 つづつの選択肢の組み合わせについてどれがより望ましいかあるいは無差別であるかを表すものであり，その選好が準推移性を満たしていれば選択肢の中から最良のものを選び出すことができるということが定理6.1で示されている。しかし実際の社会的な意志決定においては，2 つづつの組についての社会的選好を問題にするというよりも複数の選択肢の中から 1 つを選ぶことが求められる場合が多いであろう。本節ではそのような選択の仕組みの内ある種の望ましさを持つものについて考える。

初めにその望ましさについて説明する。そのために先に見たボルダルールをもう一度考えてみよう。このルールは各自が自分の選好に基づいて選択肢に点数をつけ，それを集計して社会的な選好を求めるというものであるが，最高点を取った 1 つの選択肢を選び出すようにすれば選択肢の中から 1 つを選ぶルールになる。そのような，個人の選好に基づいて（正しくは選好の表明に基づいて）選択肢の中から 1 つを選び出すような選択の仕組みを**社会的選択関数 (social choice function)** と呼ぶ。例として前に見たボルダルールを取り上げる。

ボルダルール（再） 3 人の個人 1，2，3 がいて，4 つの選択肢 x，y，z，w があり，各個人の選好が $xP_1yP_1zP_1w$，$wP_2xP_2yP_2z$，$wP_3xP_3yP_3z$ であるとする（個人 2 と 3 の選好は同じであると仮定する）。それぞれ自分が最も好む選択肢に 3 点，次のものに 2 点，3 番目のものに 1 点，最も好まないものには 0 点をつけて投票する。すると x は 7 点，y は 4 点，z は 1 点，w は 6 点となるから，社会的には x が最良のものとして選ばれる。

今，個人 3 が自分の本来の選好とは異なって $wP_3yP_3zP_3x$ という選好に基づいて投票したとしてみよう。点数を再集計してみると x は 5 点，y も 5 点，z は 2 点，w は 6 点となり，今度は社会的に w が最良のものとして選ばれることになる。つまり，個人 3 は自分の選好に忠実に投票するならば x に 2 点をつけるべきところ，x に 0 点をつけて投票することによって自分が最も好む w が選ばれるようにできるのである。

このボルダルールの変形として 1 人 1 票の投票に基づいて相対多数で最高得票者を選ぶ方法がある。通常『多数決』とはこの方法を指すかもしれない。

相対多数法（最高得票者法）(plurality rule) この方法はボルダルールにおいて各自の選好の 1 位にあるものに 1 点，その他には 0 点をつけるというように変形した形になっている。4 人の個人 1, 2, 3, 4 がいて, 3 つの選択肢 x, y, z があり各個人の選好が, yP_1zP_1x, xP_2yP_2z，xP_3zP_3y，zP_4xP_4y であるとする。各自が最も選好する選択肢に投票すると x が 2 票を得て選ばれる。ここで個人 1 が本当の選好ではなく zP_1yP_1x という選好に基づいて本来最も好む y ではなく z に投票すると x と z が同点になり，決め方によっては個人 1 が x よりも好む z が選ばれる可能性が出て来る。1 人 1 票しか持たないので 1 人の力で逆転させることはできないが同点には持ち込める。

[27] アローは社会的選択ルールの内で完全合理性を満たすものを社会的厚生関数 (social welfare function) と呼んだ。この言葉を使うとアローの一般可能性定理は『条件 U，P，I，D のすべてを満たす社会的厚生関数はない。』と表現できる。また Sen (1979) は準推移性を満たす社会的選択ルールを社会的決定関数 (social decision function) と呼んでいる。

もう１つ例を考えてみよう。

二段階多数決 3 人の個人 1，2，3 がいて，3 つの選択肢 x, y, z があり，最初に x と y の内で 1 つを多数決で選び，次にそこで選ばれたものと z とを比べて多数決で最良のものを選ぶ。各個人の選好が xP_1yP_1z，yP_2zP_2x，zP_3xP_3y であるとすると x と y との比較では x が選ばれ，次に x と z との比較では z が選ばれるから z が最終的に選ばれる。ここで，個人 1 が本当の選好ではなく yP_1xP_1z という選好に基づいて投票すると考えてみよう。そうすると x と y との比較では y が選ばれ，y と z との比較では y が選ばれるので y が最終的に選ばれる。それによって個人 1 は自分が z より好む y を実現することができる。

このようにある社会的選択関数のもとで，ある 1 人の個人が自分の選好を偽って表明することによって，正直に表明した場合と比べ自分により有利な結果に変えることができる場合，その社会的選択関数は**戦略的に操作可能 (strategically manipulable)** であると言う。これは社会における意志決定の方法にとって望ましいことではなかろう。では**戦略的に操作不可能 (strategically nonmanipulable, strategy-proof)** な社会的選択関数はあるのだろうか。実は，それは独裁的なものに限られるといいうのが**ギバード・サタースウェイト (Gibbard-Satterthwaite Theorem) の定理**の主張である[28]。それを証明しよう。以下の議論では条件 U（人々の選好についてはいかなるものも許される）および個人の選好の完備性や推移性は仮定するが条件 P，I は仮定せず，代わりに戦略的操作不可能性を仮定する。またこれまでと同様に個人の数 n および選択肢の数 m は有限の整数である。

社会的選択関数のついて以下のような仮定を置く。

仮定 8.1 (社会的選択関数についての仮定). 人々の選好を様々に組み合わせて社会的選択関数によって選ばれる可能性のある選択肢の数は少なくとも 3 である。

すなわち，人々の選好ををどのように組み合わせても特定の 2 つの選択肢のいずれかが選ばれるような限定された意志決定ルールではないと仮定するわけである。選択肢全体の集合を A で，社会的選択関数によって選ばれる可能性のある選択肢の集合を A' で表す。A' と A とは同じ集合であると考えることもできるしその方が自然であるかもしれない。その場合どの選択肢も選ばれる可能性があり，**社会的選択関数はタブーを許さない**と言われる。例えばすべての人々がある共通の選択肢を最も好むならば，その選択肢が社会的に選ばれると考えるべきであろう。しかしここではそのようには仮定せず社会的選択関数によって選ばれる可能性のある選択肢の数が 3 以上であるとだけ仮定する[29]。

8.2 単調性とパレート原理

社会的選択関数における独裁者を次のように定義する。

---

[28] Gibbard (1973) および Satterthwaite (1975) による。

[29] すべての人々が共通して最も好む選択肢が選ばれないとするならばその選択肢は社会的にタブーとされていることになる。これはすべての選択肢が公平な取り扱いを受けておらず一部の選択肢が差別的な扱いを受けていることを意味する。そのとき社会的選択関数は中立的ではない。逆にすべての選択肢が公平に扱われているときには社会的選択関数は中立的である。この中立性の意味は単純多数決ルールについて検討したところで取り上げた条件 N とほぼ同じ考え方を社会的選択関数に適用したものである。タブーを許さない社会的選択関数がすべて中立的というわけではないが，中立的な社会的選択関数はタブーを許さない。

独裁者 社会的選択関数によって選ばれる選択肢が常に（人々がどのような選好を持っていたとしても）A' の中である特定の個人 i にとって最良の（他のすべての選択肢よりも好むか少なくとも無差別である）選択肢であるとき，その個人 i が独裁者である。

アローの定理における独裁者と少し違うのはアローの独裁者は 2 つづつの選択肢からなるあらゆる組み合わせについてその個人の厳密な選好（P_i）が社会の選好に反映されるのに対して，社会的選択関数の独裁者は選択肢全体の中からただ 1 つのものを選ぶという点について独裁的であることだけが求められるということと，対象が A' に含まれる選択肢に限られているということである。独裁者と言えどもタブーを犯すことはできない。

社会的選択関数は選択肢の中から 1 つの（最良の）ものを選び出すルールであると定義したが，あるルールに基づいて選んだとき最良のものが 2 つ以上になることがあるであろう（ボルダルールで言えば最上位の 2 つの選択肢の得点が等しくなった場合)。しかしその場合にも何らかの方法（決戦投票，名前のアルファベット順・50 音順，候補者の年齢順，個人 1 の選好による等の恣意的な方法など）によってただ 1 つだけを選ぶものと仮定する。当選者が 1 名に限られる選挙などはそうであろう。ただし，くじ引きのような確率的な方法はこの節では考えない（これについては将来の稿で取り扱う予定である)。

定理 8.1 (ギバード・サタースウェイトの定理). 仮定 8.1を満たす戦略的に操作不可能な社会的選択関数は独裁的（独裁者が存在する）である。

初めに個人の選好において無差別な関係がない場合，すなわちどのような 2 つの選択肢についてもどちらをより好むかはっきりしている場合を考える。記号で書けば

$$\begin{aligned}&\text{すべての個人 } i\text{，すべての異なる } x,\ y \text{ について}\\&xP_iy \text{ または } yP_ix \text{ である}\end{aligned} \tag{8.1}$$

ような場合を考える。

必要に応じて社会的選択関数を $C(a)$ のように表すことにする。

定理の証明に先立ってまず次の結果を示す[30]。

補助定理 8.1 (単調性 (monotonicity)). 戦略的に操作不可能な社会的選択関数について，ある選好の組み合わせ a において x が選ばれるものとする（x は A' に属する選択肢の 1 つであり $x = C(a)$ と表す)。x とそれ以外のあらゆる選択肢 y に関して，すべての個人 i について

$$xP_i^ay \text{ ならば } xP_i^by$$

が成り立つような選好の組み合わせ b において社会的選択関数によって選ばれる選択肢は x である ($C(b) = x$)[31]。

この補助定理の結論が成り立つことを『単調性』と定義する。

証明. まず個人 1 の選好だけが R_1^a から R_1^b に変わり，他の人々（i で代表させる）の選好は R_i^a のままであると仮定しそのような選好の組み合わせを a^1 で表す。$C(a^1) = z(\neq x)$ であると

[30]本節の証明は鈴村 (1983) における証明を『単調性』,『パレート原理』などに整理したものである。

[31]すべての人が xP_i^ay であると言っているのではないし，x 以外のすべての選択肢 y について xP_i^ay であると言っているのでもない。もし a においてある人が xP_i^ay であるならばその人は b においても xP_i^by となるような場合を考えるということである。

仮定してみよう。そのとき，戦略的操作不可能性によって個人 1 の選好において $xP_1^a z$ でなければならない。そうでなければ，すなわち $zP_1^a x$ であれば，個人 1 は本当の選好が R_1^a であるときに R_1^b と偽ってよりよい結果を実現することができる。$xP_1^a z$ であるならばこの補助定理の仮定によって $xP_1^b z$ である。しかし今度は戦略的操作不可能性によって $zP_1^b x$ でなければならない。なぜならば，$xP_1^b z$ であるとすると $C(a) = x$ であるから個人 1 は本当の選好が R_1^b であるときに R_1^a と偽ってよりよい結果を実現できてしまう。以上の議論から，$C(a^1) = z(\neq x)$ であると仮定することによって矛盾に陥ったので $C(a^1) = x$ でなければならない。次に a^1 において個人 2 の選好だけが R_1^a から R_1^b に変わったと仮定しそのような選好の組み合わせを a^2 で表すと，今と同様の議論によって $C(a^2) = x$ でなければならないことがわかる。同じようにして a^2 において個人 3 の選好の変化を考える，というような作業を繰り返して行くと結局 $C(b) = x$ となる。 □

この結論によれば R_i^a と R_i^b において x と y の間の個人 i の選好が変わらなければ b において y が選ばれることはないが，x をより好む方向に選好が変化した場合（$yP_i^a x$ が $xP_i^b y$ に変化した場合）にも y が選ばれることはない。

次に

補助定理 8.2 (パレート原理). 人々の選好のある組み合わせを a とする。社会的選択関数によって選ばれる可能性のある選択肢の集合 A' に属する 2 つの選択肢 x と y に関してすべての個人について $xP_i^a y$ であれば社会的選択関数によって選ばれる選択肢は y ではない。

証明. 選好のある組み合わせ a において，すべての個人が $xP_i^a y$ であるが $C(a) = y$ であると仮定してみよう。x は A' に属するので x が社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがある。それを b とする（$C(b) = x$）。さらに別の選好の組み合わせ c を考え，x，y 以外の任意の選択肢を z として，すべての個人について $xP_i^c yP_i^c z$ であるとする。選好の組み合わせ a と c とを比較すると単調性によって $C(c) = y$ であることが言えるが[32]，一方 b と c とを比較するとやはり単調性によって $C(c) = x$ となる[33]。これは矛盾であるから $C(a) = y$ であってはならない。 □

この補助定理の結論は

系 8.1. x が社会的選択関数によって選ばれる可能性があり（A' に属し），すべての人が A' の中で x を最も選好するならば社会的選択関数によって x 以外の選択肢が選ばれることはないから x が選ばれる。

ということを意味し，アローの一般可能性定理における条件 P（パレート原理）と同様の趣旨のものであるが，これ（補助定理 8.2および系 8.1）を本節以降では『パレート原理』と呼ぶことにする。

8.3 アローの定理を用いたギバード・サタースウェイトの定理の証明

いくつかの段階（ステップ）に分けて議論を進めて行く。

[32] a においても c においてもすべての個人が y より x を好み（$xP_i^a y$，$xP_i^c y$），c において y は x 以外のどの選択肢よりも好まれているので x，y 以外の z について『$yP_i^a z$ ならば $yP_i^c z$』が成り立っている。

[33] c において x は，すべての個人によって他のどの選択肢よりも好まれている。したがって b において x が選ばれるならば c においても選ばれなければならない。

まず準備として，(8.1) を満たす個人の選好のある組み合わせ a をもとにして，選択肢を A' に限定した別の選好 $\gamma_{xy}(R_i^a)$ を作ってみる。A' に属する（以下同様）適当な 2 つの選択肢 x，y をとり両者の関係を保ちながらこの 2 つを各個人の選好の最上位に移し，それ以外の選択肢は互いの順序を変えないで x，y より下に移す[34]。そのようにして R_i^a から作った各個人の選好の組み合わせを

$$\Gamma_{xy}(a) = \{\gamma_{xy}(R_1^a), \gamma_{xy}(R_2^a), \cdots, \gamma_{xy}(R_n^a)\}$$

のように表す。このような選好は架空のものであるが，あらゆる選好の組み合わせを許すという前提によって実際の選好となる可能性がある。

こうして作った選好の組み合わせ $\Gamma_{xy}(a)$ に基づいて社会的選択関数によって x が選ばれる（$x = C(\Gamma_{xy}(a))$ と表す）ときには $xP^a y$ であり，y が選ばれるとき（$y = C(\Gamma_{xy}(a))$）には $yP^a x$ であるというようにして社会的な選好 P^a を定義する。選択肢を A' の範囲に限定しているのでパレート原理によって x，y のいずれかが選ばれる。

同様に x，z を各自の選好の最上位に移して新しい選好の組み合わせ $\Gamma_{xz}(a)$ を作り，$x = C(\Gamma_{xz}(a))$ のとき $xP^a z$ などと定義する。同じようにしてすべての選択肢の組み合わせ，例えば u，v について $\Gamma_{uv}(a)$ を作り $v = C(\Gamma_{uv}(a))$ のとき $vP^a u$ などと定義して P^a を構成する。また同一の選択肢同士は社会的に無差別，例えば $xI^a x$ であるとし，P^a と I^a を合わせて R^a で表す。R^a は各個人の選好 R_i^a から以上のような手順によって導かれた社会的選好である。

a 以外の選好の組み合わせ，例えば b についても同じようにして $\Gamma_{xy}(b)$ などを作り，社会的選好 R^b を導き出すことができる。

このようにして作った社会的選好（R^a で代表させる）について次の結果を得る。

ステップ 1. R^a はアローの一般可能性定理における条件 I（無関係な選択対象からの独立性）を満たす。

証明. もしそうでないとすると，『A' に属するある 2 つの x，y について，人々の選好が R_i^a から R_i^b に変わったとき x と y に関する選好（各個人が x と y のどちらを好むか）は変わらないのに社会的には $xP^a y$ から $yP^b x$ に変わってしまう』ということが起きる可能性がある。そのように仮定しよう。

社会的選好 P^a の定義から $x = C(\Gamma_{xy}(a))$，$y = C(\Gamma_{xy}(b))$ である。選好の組み合わせ a，b において x，y を最上位に移すことによって作った新しい選好の組み合わせ $\Gamma_{xy}(a)$ と $\Gamma_{xy}(b)$ について，全員が $\gamma_{xy}(R_i^a)$ の選好を持っているような選好の組み合わせを a^0 で表し，個人 1 から順に 1 人づつ選好が $\gamma_{xy}(R_i^b)$ に変わって行くものとする。k 人の選好が $\gamma_{xy}(R_i^b)$ に変わったときの選好の組み合わせを a^k で表す。$\Gamma_{xy}(a)$，$\Gamma_{xy}(b)$ のいずれにおいても x と y が各個人の選好の最上位に位置しているので，パレート原理からすべての a^k について社会的選択関数によって選ばれる選択肢（これを $C(a^k)$ で表す）は x か y のいずれかである。$xP^a y$ および $yP^b x$ であることから $C(a^0) = x$，$C(a^n) = y$ なので $C(a^k) = y$ となる最小の k があり，それを k^* とする。そのとき $C(a^{k^*-1}) = x$，$C(a^{k^*}) = y$ である。a^{k^*-1} と a^{k^*} とでは個人 k^* の選好が異なるだけであり，その個人 k^* の選好 $R_{k^*}^a$ と $R_{k^*}^b$ において x と y に関する選好は同じであるから，x，y を最上位に移して作った $\gamma_{xy}(R_{k^*}^a)$ と $\gamma_{xy}(R_{k^*}^a)$ においても x と y に関する選好は同じである。よって単調性によって $C(a^{k^*-1}) = x$ ならば $C(a^{k^*}) = x$ でなければならない。したがって最初の仮定が間違っていたことになり条件 I が満たされる。 □

[34]例えばある個人の選好において (w, x, z, y) の順であれば (x, y, w, z) と変え，(z, y, x, w) の順であれば (y, x, z, w) と変えることを意味する。

次に

ステップ 2. R^a はアローの一般可能性定理における条件 P（パレート原理）を満たす。

証明. A' に属する2つの選択肢 x, y に関して，すべての個人について $xP_i^a y$ であるのに $yR^a x$ であるとすると，x と y は異なるので $yP^a x$ すなわち $y = C(\Gamma_{xy}(a))$ であることになる。しかしこのことは，x が A' に属し x 以外のあらゆる選択肢 y についてすべての人にとって $xP_i^a y$ ならば x が選ばれるというパレート原理に反する。したがって条件 P が満たされる。 □

さらに

ステップ 3. R^a は完全合理性（完備性，反射性，推移性）を満たす。

証明. 社会的選択関数が常に1つの選択肢だけを選び出す限り R^a はあらゆる x，y について比較可能であるから完備性が成り立つ。また反射性は $xI^a x$ によって満たされている。そこで推移性を示す。

A' に属する互いに異なる3つの選択肢 x，y，z をとり $xP^a y$，$yP^a z$ であるが $xP^a z$ ではない，すなわち $zP^a x$ であると仮定してみよう。そのとき P^a の定義によって $x = C(\Gamma_{xy}(a))$, $y = C(\Gamma_{yz}(a))$, $z = C(\Gamma_{xz}(a))$ である。ここで人々のもとの選好 R_i^a において x, y, z の3つを相互間の関係を保ったまま最上位に移して別の選好を作る。各個人の新しい選好を $\gamma_{xyz}(R_i^a)$，新しい選好の組み合わせを $\Gamma_{xyz}(a)$ と表す。パレート原理によって $C(\Gamma_{xyz}(a))$ は x，y，z のいずれかであるが $x = C(\Gamma_{xyz}(a))$ であるとしてみよう。こうして作った各自の選好 $\gamma_{xyz}(R_i^a)$ において x，z の位置関係を変えず，y を3番目に持って行ってさらに新たな選好を作りそれを R_i^b で表す。$z = C(\Gamma_{xz}(a))$ であり，上で作った社会的選好 R^a は条件 I を満たすことから x と z の社会的選好関係に y の存在は関係しないので $z = C(b)$ でなければならない（b は全員の選好が R_i^b であるような選好の組み合わせである）。すなわち最後に作った選好 R_i^b をもとにした社会的選択関数は z を選ぶ。

全員の選好が $\gamma_{xyz}(R_i^a)$ である状態（選好の組み合わせ）から始めて，個人1から順にその選好が R_i^b に変わって行くものと考え，k 人の選好が R_i^b に変わった状態を a^k と表す。a^0 は全員の選好が $\gamma_{xyz}(R_i^a)$ である状態を，a^n は全員の選好が R_i^b になった状態を表す。$C(a^0) = x$, $C(a^n) = z$ であるが，$C(a^0) \neq x$ となる最小の k を k^* とすると，$C(a^{k^*})$ は y か z のいずれかである。$C(a^{k^*}) = z$ であるとすると，個人 k^* の $\Gamma_{xyz}(a)$ における選好 $\gamma_{xyz}(R_{k^*}^a)$ と b における選好 $R_{k^*}^b$ とは x と z について一致するのに $C(a^{k^*-1}) = x \neq z = C(a^{k^*})$ となり単調性に反する[35]。一方，$C(a^{k^*}) = y$ であれば，$k = k^*$ のとき個人 k^* が $y = C(a^{k^*})$ よりも $x = C(a^{k^*-1})$ を好むことになり（$C(a^{k^*-1}) R_{k^*}^b C(a^{k^*})$）[36]，本当の選好が $R_{k^*}^b$ であるときに $\gamma_{xyz}(R_{k^*}^a)$ に基づいて意志表明した方が有利となるから戦略的に操作可能となってしまう。したがって $zP^a x$ ではなく $xP^a z$ となり推移性が成り立つ。 □

以上によって R^a はアローの一般可能性定理の条件をすべて満たすことがわかるので独裁者が存在する。個人 i が R^a の独裁者であるとすると

$$A'\text{に属するすべての } x,\ y \text{ について } xP_i^a y \text{ であれば } xP^a y \text{ である} \tag{8.2}$$

が成り立つ。つまり A' に属する選択肢について個人 i の選好がそのまま社会的選好となる。

次に

[35] $k = k^* - 1$ のときの個人 k^* の選好は $\gamma_{xyz}(R_{k^*}^a)$ であり，$k = k^*$ のときの選好は $R_{k^*}^b$ である。

[36] $R_{k^*}^b$ において y は x，z に次いで3番目に置かれている。

ステップ 4. R^a の独裁者は社会的選択関数の独裁者である。

証明. 個人 i が独裁者であるということは

$$\begin{aligned}&\text{人々の選好の組み合わせが } a \text{ であるとき，} A'\text{に属するすべての } x \text{ について，}\\ &\text{その } x \text{ が社会的選択関数によって選ばれる選択肢ではない（} x \neq C(a)\text{）}\\ &\text{ならば } C(a)P_i^a x \text{ である}\end{aligned} \tag{8.3}$$

言い換えれば，社会的選択関数によって選ばれる選択肢 $C(a)$ は個人 i にとって A' に属する選択肢の中で最良のものである。

さて，R^a の独裁者である個人 i が社会的選択関数の独裁者ではないとしてみよう。ということは (8.3) によって

$$\begin{aligned}&A'\text{に属するある } x \text{ について，} x \neq C(a) \text{ であって，}\\ &\text{かつ } xP_i^a C(a) \text{ である}\end{aligned} \tag{8.4}$$

ようなものがあるということを意味する。そのように仮定してみる。$C(a)$ を y で表せば，個人 i は R^a の独裁者であるから，(8.2) より $x = C(\Gamma_{xy}(a))$ である[37]。ここで全員の選好が $\gamma_{xy}(R_i^a)$ である状態から始めて，個人 1 から順にもとの選好 R_i^a に変わって行くものと考える。a^k で k 人の選好が R_i^a に変わった状態を表すとすると，$C(a^0) = x$，$C(a^n) = y$ である。$C(a^k) \neq x$ となる最小の k を k^* で表すと，個人 k^* の a における選好 $R_{k^*}^a$ と $\Gamma_{xy}(a)$ における選好 $\gamma_{xy}(R_{k^*}^a)$ とは x と y について一致するのに $C(a^{k^*-1}) = x \neq y = C(a^{k^*})$ となり単調性に反する。したがって (8.4) が表すようなことはありえず R^a の独裁者は社会的選択関数の独裁者である。 □

以上で選択肢に関する人々の選好において無差別関係がない場合に定理が成り立つことが示された。最後にそのような選好に限られた場合の独裁者が無差別関係を含む一般的な選好についても独裁者であることを示す。

ステップ 5. 無差別関係がない選好に限られた場合の独裁者は無差別関係を含む一般的な選好についても独裁者である。

証明. 無差別関係を許すような一般的な選好の組み合わせを a とする，また無差別関係を含まない選好の組み合わせを 1 つとりそれを b とする。無差別関係がない場合の独裁者を個人 i として a をもとに b を次のように構成する。選好の組み合わせ a において，個人 i にとって A' の中で最良の選択肢を y とし（複数あればその各々について）[38]，それ以外の選択肢（A' に属するものもそうでないものも）を z としたとき，

$$\begin{aligned}&\text{個人 } i \text{ は } z \text{ より } y \text{ を好み（} yP_i^b z\text{），} i \text{ 以外の人々（} j \text{ で代表させる）は}\\ &y \text{ より } z \text{ を好む（} zP_j^b y\text{）}\end{aligned} \tag{8.5}$$

[37] $\Gamma_{xy}(a)$ は各個人の選好 R_i^a において x，$y(= C(a))$ が互いの順序を変えずに最上位になるようにして作った選好 $\gamma_{xy}(R_i^a)$ の組み合わせであり $x = C(\Gamma_{xy}(a))$ ならば $xP^a y$ と定義した。

[38] 個人 i にとって y が最良であるとは他のすべての（A' の中の）選択肢 w に対して $yR_i^a w$ であることである。$yP_i^a w$ とまでは求めない。したがって複数あるかもしれない。

を満たすような形で無差別関係を含まない選好の組み合わせ b を構成する[39]。今 b において社会的選択関数によって選ばれる $C(b)$ は a において個人 i にとって最良のものではないと仮定してみる。(8.5) によって b において個人 i は上で定義した y を $C(b)$ より好む（$yP_i^bC(b)$）。個人 i は b において独裁者であるから，$C(b)$ でないすべての選択肢 x について $C(b)P_i^bx$ が成り立つ。しかしこれは $yP_i^bC(b)$ と矛盾する。したがって，$C(b)$ は a において個人 i にとって最良のもの，すなわち y の 1 つでなければならない。

ここで全員の選好が R_i^a である状態から始めて，個人 1 から順に選好が R_i^b に変わって行くと考え，k 人の選好が R_i^b に変わった状態を a^k で表す。$C(a^0)=C(a)$，$C(a^n)=C(b)$ である。もし個人 i が一般的な選好について独裁者でないとすると $C(a)$ が個人 i にとって最良でないということがあり得る。そう仮定してみよう。すると，上で見たように $C(b)$ は a において個人 i にとって最良のものであるから，$C(a^k)$ が a において個人 i にとって最良のものとなるような最小の k がある。それを k^* とする。$C(a^{k^*-1})$ は a において個人 i にとって最良ではなく，$C(a^{k^*})$ は最良である。k^* が i であれば $C(a^{k^*})P_i^aC(a^{k^*-1})$ となり，個人 i は本当の選好が R_i^a であるときに R_i^b に基づいて意志表明した方がよりよい結果を得られることになってしまう[40]。k^* が i でなければ，(8.5) によって個人 k^* は選好の組み合わせ b において $C(a^{k^*})$ より $C(a^{k^*-1})$ を好む[41]。そうすると個人 k^* は $k=k^*$ のときに本当の選好 $R_{k^*}^b$ を偽って $R_{k^*}^a$ に基づいて意志表明した方がよりよい結果を得られることになってしまう。いずれにしても戦略的に操作可能となるので個人 i は一般的な選好においても独裁者である。 □

以上でギバード・サタースウェイトの定理の証明が終わった。

8.4 戦略的操作不可能性と単調性の同値性

ここで単調性を仮定すると戦略的操作不可能性が導かれることを示そう。

定理 8.2 (戦略的操作不可能性と単調性の同値性). 単調性は戦略的操作不可能性を意味する。したがって補助定理 31 と合わせると，個人の選好において無差別関係がない場合には戦略的操作不可能性と単調性とは同値（同じ意味）である。

証明. ある選好の組み合わせ a において社会的選択関数によって選択肢 x が選ばれるものとする（$C(a)=x$）。単調性を満たすような社会的選択関数が a において戦略的に操作可能であると仮定してみよう。そうするとある 1 人の個人 i の選好が R_i^a から R_i^b に変わって（そのような選好の組み合わせを b とする）社会的選択関数によって選ばれる選択肢が y に変わり（$C(b)=y$），なおかつ yP_i^ax となる（もとの選好において x より y を好む）ようなケースが存在する。個人 i の別の選好 R_i^c を考え，x，y 以外の任意の選択肢 z について $yP_i^cxP_i^cz$ であるとする。個人 i の選好が R_i^a から R_i^c に変わった場合（そのような選好の組み合わせを c とする）と R_i^a のままである場合（選好の組み合わせは a）とを比較すると，単調性によって $C(c)=x$ である[42]。一方，b と c とを比べるとやはり単調性によって $C(c)=y$ でなければな

[39] y が複数ある場合，例えば y_1 と y_2 があれば，個人 i について $y_1P_i^by_2$ あるいは $y_2P_i^by_1$ であって $y_1P_i^bz$，$y_2P_i^bz$ であるような選好を考えるということである。個人 i 以外も同様。

[40] $k^*=i$ のとき $C(a^{k^*})$ は個人 i までが b の選好を持っているときに選ばれる選択肢である。

[41] $C(a^{k^*})$ は (8.5) の y にあたり，$C(a^{k^*-1})$ は z にあたる。

[42] 仮定により a において yP_i^ax，c においても yP_i^cx である。また c において x は y 以外の選択肢のいずれよりも個人 i によって選好されている。

らない[43]。これは矛盾である。したがって $C(b)=y$ であってはならず，戦略的に操作可能ではない。 □

9　ギバード・サタースウェイトの定理の別の証明

ギバード・サタースウェイトの定理の別の証明を紹介する。

9.1　一般化された単調性・弱い意味の単調性とパレート原理

本節では個人の選好について無差別な関係を含む一般的なものを考える。選択肢の数は 3 以上の有限な数であるとし，条件 U（人々の選好についてはいかなるものも許される）を仮定する。また独裁者の概念は社会的選択関数によって選ばれる可能性のある選択肢（集合 A' に含まれる選択肢）に限ったものなので A' と A とは同じ集合である，すなわちすべての選択肢が社会的選択関数によって選ばれる可能性がある，あるいは社会的選択関数はタブーを許さないと仮定しても支障がないからそのように仮定する。

個人の選好に無差別な関係が含まれる場合『単調性』はそのままでは成り立たない。ここでは後の証明に必要となる次のような少し異なる意味での単調性を示す。

補助定理 9.1 (一般化された単調性 (generalized monotonicity)). ある選好の組み合わせ a においてある 2 つの選択肢 (x,y) について人々の選好が

(1) あるグループ V に属する人々：$xP_i^a y$

(2) あるグループ V' に属する人々：$xI_i^a y$

(3) それら以外（V'' に属する人々）：$yP_i^a x$

のようになっていて，社会的選択関数によって x が選ばれる $(C(a)=x)$ ものとする。x，y 以外の選択肢に関する選好は特定しない。また別の選好の組み合わせ b において

(1) V に属する人々：$xP_i^b y$，その他の選好は特定しない

(2) V' に属する人々：$xP_i^b y$，さもなくば選好は a とまったく同じ

(3) V'' に属する人々：特定しない

であると仮定する。そのとき戦略的に操作不可能な社会的選択関数によって b において選ばれる選択肢は y ではない $(C(b)\neq y)$。

この補助定理の結論が成り立つことを『一般化された単調性』と定義する。

証明. V に属する人々が個人 1 から m $(0\leq m\leq n)$ まで[44]，V' に属する人々は個人 $m+1$ から $m'(m\leq m'\leq n)$ まで，V'' に属する人々は個人 $m'+1$ から n までであるとする。a，b

[43] c において $yP_i^c x$ である。一方 b においては x と y との間の個人 i の選好は特定されていないので $xP_i^b y$ と $yP_i^b x$ の両方の可能性がある。また c において y は個人 i によって最も選好される選択肢である。

[44] V に属する人が誰もいない可能性も排除しない。その場合 $m=0$ である。

とは異なる選好の組み合わせ c をとり x，y 以外の任意の選択肢を z として，V と V' に属する人々が $xP_i^c yP_i^c z$，V'' に属する人々が $yP_i^c xP_i^c z$ という選好を持つものとする。

個人 1 の選好が R_1^a から R_1^c に変わったときの選好の組み合わせを a^1 とし，そのとき社会的選択関数によって選ばれる選択肢が x とは異なる選択肢になったとすると，個人 1 は本当の選好が R_1^c であるときに R_1^a と偽ってよりよい結果を実現することができる。したがって $C(a^1)=x$ である。同じように考えると個人 m' までの選好が R_i^a から R_i^c に変わっても x が選ばれる（$C(a^{m'})=x$）。次に $a^{m'}$ において個人 $m'+1$ の選好が $R_{m'+1}^a$ から $R_{m'+1}^c$ に変わったときの選好の組み合わせを $a^{m'+1}$ とし，そのとき社会的選択関数によって選ばれる選択肢が y になったとすると，a において $yP_{m'+1}^a x$ であるから個人 $m'+1$ は本当の選好が $R_{m'+1}^a$ であるときに $R_{m'+1}^c$ と偽ってよりよい結果を実現することができる。一方社会的選択関数によって選ばれる選択肢が x，y 以外の z になったとすると $xP_{m'+1}^c z$ であるから，個人 $m'+1$ は本当の選好が $R_{m'+1}^c$ であるときに $R_{m'+1}^a$ と偽ってよりよい結果を実現することができる。したがって $C(a^{m'+1})=x$ である。同じように考えると結局全員の選好が R_i^a から R_i^c に変わっても x が選ばれる，すなわち $C(c)=x$ である。

ここで c から b に向けて 1 人づつ，その選好が R_i^c から R_i^b に変化するものと仮定する。このとき誰かの選好が変化して社会的選択関数によって選ばれる選択肢が x から y に直接変化することはない。V または V' に属するある人（個人 j とする）の選好の変化によって y が選ばれるようになったとすると b において $xP_j^b y$ であり，その人の選好が変化するまでは x が選ばれているから，個人 j は本当の選好が R_j^b であるときに R_j^c と偽ってよりよい結果を実現することができる。一方 V'' に属するある人（個人 k とする）の選好の変化によって y が選ばれるようになったとすると c において $yP_k^c x$ であり，その人の選好が変化するまでは x が選ばれているから，個人 k は本当の選好が R_k^c であるときに R_k^b と偽ってよりよい結果を実現することができる。

しかし一度 x から x，y 以外の選択肢に変化し，さらに y に変化するという可能性は残る。そこで何人かの選好が R_i^c から R_i^b になったときに社会的選択関数によって選ばれる選択肢が $z(\neq x,\ y)$ となり，さらにある個人 l の選好が R_l^c から R_l^b になったときに y になるものと仮定してみよう。個人 l が V または V' に属する場合もそうでない場合も c において $yP_l^c z$ であるから，本当の選好が R_l^c であるときに R_l^b と偽ってよりよい結果を実現することができる。したがって，社会的選択関数が戦略的に操作不可能であれば選好の組み合わせが 1 人 1 人 c から b に変化する過程で社会的選択関数によって選ばれる選択肢が x から $z(\neq x,\ y)$ を経て y に変化することはない。以上によって b において y が選ばれないことが示された。 □

この補助定理におけるグループ V は 1 人の個人の場合もあり得るし，全員からなる集合であるかもしれない。

次にこれより弱い以下のような意味の単調性を定義する。

弱い意味の単調性 (weak monotonicity) ある選好の組み合わせ a においてある 2 つの選択肢 (x,y) について人々の選好が

(1) あるグループ V に属する人々：$xP_i^a y$

(2) それら以外（V' に属する人々）：$yP_i^a x$

のようになっていて，社会的選択関数によって x が選ばれる $(C(a)=x)$ ものとする。x，y 以外の選択肢に関する選好は特定しない。また別の選好の組み合わせ b において

（1）V に属する人々：$xP_i^b y$，その他の選好は特定しない

（2）V' に属する人々：特定しない

であると仮定する。そのとき戦略的に操作不可能な社会的選択関数によって b において選ばれる選択肢は y ではない $(C(b) \neq y)$。

2 つの単調性の定義から次の補助定理を得る。

補助定理 9.2. 一般化された単調性は弱い意味の単調性を意味する。

証明. 一般化された単調性において V' を空集合（誰もいない）と仮定すれば（V'' を V' と置き換えて）弱い意味の単調性が得られる。 □

しかし，弱い意味の単調性が一般化された単調性を意味するわけではない。

ここで人々の選好に無差別な関係が含まれる場合には前節の単調性が成り立たない場合があることを見ておこう。

単調性を満たさない戦略的に操作不可能な社会的選択関数 3 つの選択肢 x，y，z について次のような選好の組み合わせ a があり，そのとき社会的選択関数が x を選ぶものとする。

（1）個人 1：$xI_1^a yP_1^a z$

（2）他の人々：特定しない

また以下のような別の選好の組み合わせ b があり，そのとき社会的選択関数が y を選ぶものとする。

（1）個人 1：$yP_1^a xP_1^a z$

（2）他の人々：a とまったく同じ

この 2 つの選好の組み合わせについて言えば，個人 1 は a においても b においても偽りの選好を表明して得られるものはないので戦略的操作不可能性に反しない。また，a において y より x を好む（あるいは z より x を好む）人々は b においても y より x を好む（あるいは z より x を好む）ので単調性によれば b において社会的選択関数は x を選ばなければならない。したがってこの社会的選択関数は戦略的に操作不可能であるが単調性は満たさない可能性がある。一方，一般化された単調性（および弱い意味の単調性）には抵触しない。

次に弱い意味の単調性を用いてパレート原理を証明する。内容は前節のパレート原理と同一である。

補助定理 9.3 (パレート原理（再）). 人々の選好のある組み合わせを a とする。ある 2 つの選択肢 x と y に関してすべての個人について $xP_i^a y$ であれば社会的選択関数によって選ばれる選択肢は y ではない。

証明. x が社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがありそれを b とする $(C(b) = x)$。すべての人々が a において $xP_i y$ という選好を持っている。したがって b において y より x を好む人は a においても好むから弱い意味の単調性によって a において y が選ばれることはない。 □

この補助定理は，もしすべての人々が共通にある選択肢 x を最も好んでいるなら x が社会的選択関数によって選ばれることを意味する。

もう少し準備が必要である。社会的選択関数についての『決定的』と『ほとんど決定的』を定義する。

ほとんど決定的 (almost decisive) 全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が y より x を好み（xP_iy），他のすべての人々（j で代表させる）が x より y を好む（yP_jx）ときに社会的選択関数によって y が選ばれることがないならば，グループ V は『y に対して x についてほとんど決定的である』と言う。

『決定的』は

決定的 (decisive) 全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が y より x を好む（xP_iy）ときに社会的選択関数によって y が選ばれることがないならば，グループ V は『y に対して x について決定的である』と言う。

もしグループ V に属するすべての人々があらゆる選択肢の組について決定的であり，彼らが最も好む選択肢の集合が X であるとすると，X に属する選択肢以外の選択肢が社会的選択関数によって選ばれることはないので，必ず X に属する選択肢が選ばれる[45]。特にグループ V が 1 人の個人からなる場合にはその個人が最も好む選択肢が選ばれることになる。

そうすると独裁者は次のように表現される。

独裁者 独裁者とはあらゆる選択肢の組について決定的であるような個人を指す。

また選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的であるようなグループを『決定的なグループ』と呼ぶことにする。

以上の定義のもとで次の結果を示す。

補助定理 9.4 (独裁者の補助定理 (dictator lemma)). ある個人 i がある 2 つの選択肢の組 $(x,\ y)$ について，y に対して x についてほとんど決定的であれば，その個人 i は独裁者である。

証明. x，y 以外の任意の選択肢 z をとり次のような選好の組み合わせを考える。

（1）個人 i：xP_iyP_iz

（2）他の人々：yP_izP_ix

個人 i が y に対して x についてほとんど決定的であるから社会的選択関数によって y が選ばれることはない。またパレート原理によって z が選ばれることもない。z は任意であるから社会的選択関数は x を選ぶ。x と z とを比較すると個人 i は z より x を好むが，他の人々は x より z を好んでいる。したがって弱い意味の単調性によって，個人 i の選好において xP_iz である限り社会的選択関数が z を選ぶことはないので個人 i は z に対して x について決定的である。

次に x，y 以外の（任意に選んだ）ある選択肢を w，それら以外のすべての選択肢を z で代表させて以下のような選好の組み合わせを考える[46]。

[45]個人の選好には無差別な関係もあり得るので X は複数の選択肢を含むかもしれない。

[46]選択肢が 3 つしかない場合には z は存在しない。

（1）個人 i：$wP_ixP_iyP_iz$

（2）他の人々：$yP_iwP_ixP_iz$

個人 i が y に対して x についてほとんど決定的であるから社会的選択関数によって y が選ばれることはない。またパレート原理によって x が選ばれることも z が選ばれることもない。したがって社会的選択関数は w を選ぶ。y と w とを比較すると個人 i は y より w を好むが，他の人々は w より y を好んでいる。弱い意味の単調性によって個人 i の選好において wP_iy である限り社会的選択関数が y を選ぶことはないので個人 i は y に対して w について決定的である。

以上の論理を繰り返し使うと個人 i があらゆる選択肢の組について決定的であることが示される。したがって個人 i は独裁者である。 □

9.2　ギバード・サタースウェイトの定理の証明

パレート原理によって，あらゆる選択肢の組み合わせについてすべての人々が xP_iy ならば y が社会的選択関数によって選ばれることはないから全体の集合は決定的である。したがって決定的なグループが少なくとも 1 つは存在するということが言える。人々の人数は有限なので最も小さい（最も人数が少ない）決定的なグループが存在する。それは全員からなる集合かもしれないし，1 人の個人かもしれない。後者の場合その個人は独裁者である。

以上の事実と補助定理 9.4によってギバード・サタースウェイトの定理が以下のように証明される。

定理 9.1 (ギバード・サタースウェイトの定理（再）). 社会的選択関数が戦略的に操作不可能ならば最小の決定的なグループは 1 人の個人からなる。すなわち独裁者が存在する。

証明. ある最小の決定的なグループが 2 人以上の人からなると仮定してみよう。その最小の決定的なグループを V で表す。V に含まれる 1 人の個人を個人 i とし，3 つの選択肢 x，y，w をとり，それ以外の任意の選択肢を z として以下のような選好の組み合わせを考える[47]。

（1）個人 i：$wP_ixP_iyP_iz$

（2）個人 i 以外の V の人々：$xP_iyP_iwP_iz$

（3）それ以外：$yP_iwP_ixP_iz$

V に属するすべての人々が xP_iy をいう選好を持っている。V は決定的なので y が社会的選択関数によって選ばれることはない。パレート原理によって z が選ばれることもない。もし社会的選択関数によって x が選ばれるとすると w より x を好むのは個人 i 以外の V の人々だけで他の人々は x より w を好むから個人 i 以外の V の人々からなるグループが決定的となってしまう。一方 w が選ばれるとすると y より w を好むのは個人 i だけで他の人々は w より y を好むから個人 i が決定的となってしまう。これらのことは V が最小の決定的なグループであるという仮定と矛盾する。したがってそもそも V は 1 人の個人からなる。すなわち独裁者が存在する。 □

[47]選択肢が 3 つしかない場合には z は存在しない。

9.3 戦略的操作不可能性と一般化された単調性の同値性

ここで戦略的操作不可能性と一般化された単調性の同値性を示そう[48]。

定理 9.2 (戦略的操作不可能性と一般化された単調性の同値性). 一般化された単調性は戦略的操作不可能性を意味する。したがって補助定理 9.1と合わせると戦略的操作不可能性と一般化された単調性とは同値である。

証明. ある選好の組み合わせ a において社会的選択関数によって選択肢 x が選ばれるものとする（$C(a)=x$)。一般化された単調性を満たすような社会的選択関数が a において戦略的に操作可能であると仮定してみよう。そうするとある 1 人の個人 i の選好のみが R_i^a から R_i^b に変わって（そのような選好の組み合わせを b とする）社会的選択関数によって選ばれる選択肢が y に変わり（$C(b)=y$), なおかつ $yP_i^a x$ となる（もとの選好において x より y を好む）ようなケースが存在する。

個人 i の別の選好 R_i^c を考え x, y 以外の任意の選択肢 z について $yP_i^c xP_i^c z$ であるとする(そのような選好の組み合わせを c とする)。c において社会的選択関数が y を選ぶとすると個人 i は a においても c においても yP_ix であり，また他の人々の選好に変化はないから一般化された単調性によって a において x が選ばれてはならない。これは矛盾であるから c において y は選ばれない。x と z について a と c とを比べると個人 i 以外の人々の選好に変化がなく，個人 i は c において xP_iz であるが a における選好は特定されていない。したがて一般化された単調性によって c において z は選ばれないから，c においては x が選ばれなければならない。

一方 x と y について b と c とを比較するとやはり個人 i 以外の人々の選好に変化はなく，個人 i については c において yP_ix であるが b における選好は特定されていない。したがって一般化された単調性によって c において x は選ばれない。これは上の結論と矛盾するから $C(b)=y$ であってはならず，社会的選択関数は戦略的に操作可能ではない。 □

9.4 独裁性と弱い意味の単調性の同値性

戦略的操作不可能を一般化された単調性が同値であることが示されたわけだが，一方独裁性と弱い意味の単調性が同値であることを示すことができる。その前に独裁的だが戦略的に操作不可能ではない社会的選択関数が存在することを見ておこう。

補助定理 9.5. 独裁的だが戦略的に操作不可能ではない社会的選択関数が存在する。

証明. 3 つの選択肢 x, y, z, 2 人の個人 1, 2 からなる社会を考え，個人 1 が独裁者であると仮定する。次のような選好の組み合わせ a を考える。

(1) 個人 1：$xI_1^a yP_1^a z$

(2) 個人 2：$zP_2^a yP_2^a x$

a において $C(a)=x$ であるとする。また別の選好の組み合わせ b において, $xI_1^b yP_1^b z$, $zP_2^b xP_2^b y$ かつ $C(b)=y$ であるとする。a, b いずれにおいても x, y ともに個人 1 が最も好む選択肢であり，個人 2 にとってはそうではないからこの社会的選択関数は独裁性の条件を満たす。し

[48] この定理は Tanaka (2001) による。

かし $yP_2^a x$ および $xP_2^b y$ であるから，個人 2 は a においても b においても逆の選好を表明した方がよりよい結果を実現できるので戦略的に操作可能である。 □

次に独裁性と弱い意味の単調性が同値であることを示す。

定理 9.3. 独裁性と弱い意味の単調性は同値である。

証明. ギバード・サタースウェイトの定理において弱い意味の単調性が独裁性を意味することが示されているのでここではその逆を証明する。

独裁的な社会的選択関数が弱い意味の単調性を満たさないと仮定してみよう。すると次のような場合があり得る。ある選択肢のペア (x, y) と 2 つの選好の組み合わせ a，b について，$C(a) = x$ であり，a において y より x を好む人は b においても y より x を好み，a において x と y について無差別な人は存在せず，かつ $C(b) = y$ である。すると，x が a において独裁者が最も好む選択肢の 1 つであるならば y は b においてそうであることはありえない。したがって社会的選択関数は独裁的ではない。 □

9.5 ギバード・サタースウェイトの定理のさらに別の証明

本節の証明は補助定理 3.2，3.3によるアローの一般可能性定理の証明の手法の応用である。以下の手順で証明を進める。

(1) n 人（n は 3 以上）からなる社会において戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数があるならば，1 人少ない $n-1$ 人の社会においてもそのような社会的選択関数がある。

この論理を繰り返し使うと，例えば地球上の人口をはるかに越える 1000 億人からなる社会において戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数があれば 2 人の社会においてもそのような社会的選択関数が存在しなければならない。しかし

(2) 2 人からなる社会には戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数はない。

したがって戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数は一般的に存在しない。

という論法を用いる。

まず最初の手順から始めよう。

補助定理 9.6. n 人（n は 3 以上）からなる社会において戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数があるならば，$n-1$ 人の社会においてもそのような社会的選択関数がある。

証明. n 人の人々の内 n 番目の人（個人 n）が**あらゆる選択肢について無差別である**ような選好を持っている場合に限定して考える。そしてそのときに社会的選択関数によって選ばれる選択肢を，個人 n を除いた $n-1$ 人からなる社会の社会的選択関数によって選ばれる選択肢として定義する。

個人 n の選好を特定のものに限定したときの n 人の社会の社会的選択関数によって選ばれる選択肢がそのまま $n-1$ 人の社会の社会的選択関数によって選ばれる選択肢となるので，戦

略的操作不可能性が n 人の社会的選択関数において成り立つのなら $n-1$ 人の社会的選択関数においても成り立つ。

次に独裁者の存在について考える。この補助定理の主張とは逆に $n-1$ 人の社会に独裁者がいるものと仮定しそれを個人 i とする。2 つの選択肢 x，y をとりそれ以外のすべての選択肢を z で代表させ，ある選好の組み合わせ a において個人 i が $xP_i^ayP_i^az$，$n-1$ 番目までのそれ以外の人々（個人 j で代表させる）が $yP_j^axP_j^az$ という選好を持つとする（個人 n は $xI_n^ayI_n^az$)。個人 i は独裁者であるから $n-1$ 人の社会において，したがって定義によって（個人 n がすべて無差別という選好を持っているような）n 人の社会において社会的選択関数は x を選ぶ。次に（個人 n の選好をすべて無差別とは限定しない）n 人の社会において x，y 以外のある選択肢を w とし，x，y，w 以外のすべての選択肢を z で代表させ，個人 i が $xP_i^byP_i^bwP_i^bz$，個人 n が $wP_n^bxP_n^byP_n^bz$，それ以外の人々（個人 j で代表させる）が $yP_j^bwP_j^bxP_j^bz$ という選好を持つような選好の組み合わせを b とする。パレート原理によって社会的選択関数は z を選ぶことはない。もし y を選ぶとすると b においても a においても個人 i と個人 n 以外の人々は x より y を好み，b において個人 i と n の 2 人は y より x を好んでいる。したがって弱い意味の単調性によって a において x が選ばれることはない。これは仮定と矛盾するから b において y は選ばれない。もし b において社会的選択関数によって x が選ばれるとすると w より x を好むのは個人 i だけで他の人々はすべて x より w を好んでいる。したがって補助定理9.4によって個人 i は n 人の社会における独裁者となる。一方もし社会的選択関数によって w が選ばれるとすると y より w を好むのは個人 n だけで他の人々はすべて w より y を好んでいるから今度は個人 n が n 人の社会における独裁者となる。これらは n 人の社会において独裁者がいないという仮定と矛盾する。以上のことから $n-1$ 人の社会においても独裁者はいない。 □

上で述べたようにこの論理を繰り返し使うと，3 人以上の n 人の社会において戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数があれば 2 人の社会においてもそのような社会的選択関数が存在しなければならない。しかし

補助定理 9.7. 2 人からなる社会には戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数は存在しない。

証明. 個人 1，2 からなる社会において 2 つの選択肢 x，y をとる。それら以外のすべての選択肢を z で代表させ，ある選好の組み合わせ a において 2 人の選好がそれぞれ $xP_1^ayP_1^az$，$yP_2^axP_2^az$ であるとする。パレート原理によって x，y のいずれかが社会的選択関数によって選ばれる。もし x が選ばれるとすると補助定理 9.4によって個人 1 は独裁者となる。逆に y が選ばれるとすると個人 2 が独裁者となる。したがって戦略的に操作不可能で独裁者のいない社会的選択関数は存在しないことが示された。 □

以上で証明が終わった。

9.6 ギバード・サタースウェイトの定理のさらにさらに別の証明

本節の証明は補助定理 5.1によるアローの一般可能性定理の証明の手法の応用である。まず次の補助定理を示す。

補助定理 9.8. 社会的選択関数が戦略的に操作不可能であり独裁者はいないと仮定する。

(1) あらゆる選択肢の組 $(x,\ y)$ について，$n-1$ 人の人々が xP_iy という選好を持ち，1 人の人が yP_ix という選好を持っているときには社会的選択関数は y を選ばない。

(2) あらゆる選択肢の組 $(x,\ y)$ について，$n-k$ 人の人々が xP_iy という選好を持ち，k 人の人々が yP_ix という選好を持っているときに社会的選択関数が y を選ばないならば，$n-k-1$ 人の人々が xP_iy という選好を持ち，$k+1$ 人の人々が yP_ix という選好を持っているときにも社会的選択関数は y を選ばない。ただし k は $1 \leq k \leq n-1$ を満たす正の整数である。

証明. (1) もし 1 人の人が yP_ix という選好を持ち，他の人々が xP_iy という選好を持っているときに社会的選択関数が y を選ぶような選択肢の組 (x, y) があれば，その 1 人の個人は x に対して y についてほとんど決定的となり補助定理 9.4によって独裁者となってしまう。したがってそのような選択肢の組があってはならない。

(2) 任意に 3 つの選択肢 x，y，z を選び次のような選好の組み合わせを考える。

(i) $n-k-1$ 人の人々： $xP_iyP_izP_iw$

(ii) 1 人の人： $zP_ixP_iyP_iw$

(iii) 1 人の人： $yP_izP_ixP_iw$

(iv) $k-1$ 人の人々： $zP_iyP_ixP_iw$

w は x，y，z 以外の任意の選択肢を表す。$n-k$ 人の人々が xP_iy という選好を持ち k 人の人々が yP_ix という選好を持っている，同様に $n-k$ 人の人々が yP_iz という選好を持ち k 人の人々が zP_iy という選好を持っている。したがってこの補助定理の仮定から社会的選択関数は y も z も選ばない。またパレート原理によって w も選ばれない。w は任意であるから社会的選択関数は x を選ぶ。そのとき，$n-k-1$ の人々が xP_iz という選好を持ち $k+1$ 人の人々が zP_ix という選好を持っている。 弱い意味の単調性によって，その $n-k-1$ の人々が xP_iz という選好を持っている限り z が社会的選択関数によって選ばれることはない。x，y，z は任意であるから補助定理が成り立つ。

□

この結論は $k=n-1$ の場合にも成り立つ。この補助定理によって次の形のギバード・サタースウェイトの定理が証明される。

定理 9.4 (ギバード・サタースウェイトの定理). 戦略的に操作不可能な社会的選択関数に独裁者がいないとすると，それは戦略的に操作可能となる（戦略的に操作不可能ではない)。

証明. 社会的選択関数が戦略的に操作不可能であれば，補助定理 9.8の (1) から始めて繰り返し (2) を適用していくと，$k=n-1$ の場合に次のようなケースを得る。

(1) 1 人の人： $zP_ixP_iyP_iw$

(2) 1 人の人： $yP_izP_ixP_iw$

(3) $n-2$ 人の人々： $zP_iyP_ixP_iw$

このとき社会的選択関数は y も z も w も選ばず x を選ぶ。しかしすべての人々が x より z を好んでいるからこれはパレート原理に反する。 □

10　結びにかえて

本稿ではアローの一般可能性定理，ギバード・サタースウェイトの定理および多数決決定法を中心に社会的選択理論の基礎を述べて来た。上記の 2 つの定理は人々が異なる選好を持っている場合の集団における整合的な意志決定の困難さを示すものであるが，一方で多数決について示したように人々の好みが似通っていたり，逆に極端に対立するような場合には首尾一貫した意志決定ができるようになる可能性がある。

予定している将来の稿では，確率的な社会的選好や社会的選択関数，複数の選択肢を選ぶ可能性のある社会的選択関数などの問題を取り扱いたい。確率的な社会的選択関数とは確率的な仕組みを組み込んで複数の選択肢の中から 1 つを選ぼうとするものである。その場合戦略的操作不可能性を仮定すると，ギバード・サタースウェイトの定理と同様に確率的に独裁的な社会的選択関数でなければならないことが示されるが，それは必ずしも否定的な結論ではない。

参考文献

Arrow, Kenneth, *Social Choice and Individual Values* (2nd ed.), John Wiley，1963（邦訳：ケネス・アロー著 長名寛明訳『社会的選択と個人的評価』（日本経済新聞社）, 1977）.

A. Gibbard (1973), Manipulation of voting schemes: A general result, *Econometrica* **41**: 587-602.

M. A. Satterthwaite (1975), Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, *Journal of Economic Theory* **10**: 187-217.

Sen, Amartya, *Collective Choice and Social Welfare*, North-Holland，1979（初版 1970）（邦訳：アマルティア・セン著 志田基与師他訳『集合的選択と社会的厚生』（勁草書房）, 2000）.

鈴村興太郎，経済計画理論，筑摩書房，1983.

鈴村興太郎 (Suzumura，K.)，Welfare Economics Beyond Welfarist-consequentialism, *Japanese Economic Review* 51, 1-32，2000.

Yasuhito Tanaka (2001), Generalized monotonicity and strategy-proofness: A note, *Economics Bulletin*, **4**, No.11, University of Illinois.
(http://www.economicsbulletin.uiuc.edu/Abstract.asp?PaperID=EB-01D70005,
http://www.economicsbulletin.uiuc.edu/2001/volume4/EB-01D70005A.pdf)

著者略歴

田中靖人（たなかやすひと）
1953 年　大阪府岸和田市生まれ
1976 年　京都大学工学部卒業
1983 年　横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了
1986 年　東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得
山形大学人文学部講師，同助教授，中央大学法学部助教授を経て
現在　中央大学法学部教授，経済学博士（中央大学）
専攻　理論経済学，ゲーム理論とその応用

著書

『ゼロから始める経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゼロから始める国際経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゲーム理論と寡占』（中央大学出版部, 2001）

主要論文

"Tariffs and welfare of an exporting country in a free entry oligopoly under integrated markets", *Oxford Economic Papers* Vol. 44, Oxford University Press, 1992.

"Export subsidies under dynamic duopoly", *European Economic Review* Vol. 38, North-Holland, 1994.

"Long run equilibria in an asymmetric oligopoly", *Economic Theory* Vol. 14, Springer-Verlag, 1999.

"A finite population ESS and long run equilibria in an n players coordination game", *Mathematical Social Sciences* Vol. 39, North-Holland, 2000.

"Stochastically stable states in an oligopoly with differentiated goods: Equivalence of price and quantity strategies", *Journal of Mathematical Economics* Vol. 34, North-Holland, 2000.

"Profitability of price and quantity strategies in a duopoly with vertical product differentiation", *Economic Theory* Vol. 17, Springer-Verlag, 2001.

"Profitability of price and quantity strategies in an oligopoly", *Journal of Mathematical Economics* Vol. 35, North-Holland, 2001.

"Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentiated goods", *International Journal of Industrial Organization* Vol. 19, North-Holland, 2001.

E-Mail: yasuhito@tamacc.chuo-u.ac.jp