社会的選択理論の展開

–ウィルソンの定理，確率的な社会的選択関数，複数の選択肢を選ぶ社会的選択関数，など–

中央大学 法学部

田中靖人

〒 192-0393 東京都八王子市東中野 742-1 中央大学 2 号館 7 階

E-mail: yasuhito@tamacc.chuo-u.ac.jp

目 次

本稿は前稿（中央大学経済研究所ディスカッションペーパーNo. 19（2001年11月）『社会的選択理論の基礎』）の続きである。記号の使い方，用語の意味，基本的な概念，特にアローの一般可能性定理 (Arrow (1977))，寡頭制定理，ギバード・サタースウェイトの定理 (Gibbard (1973)，Satterthwaite (1975)）については前稿を参照していただきたい。

1　非循環性と拒否権者定理

1.1　非循環性について

前稿の定理6.1において準推移性（厳密な選好の推移性）が満たされれば選択肢の中から最良のもの（他の任意の選択肢 y に対して xRy となるような x，複数あるかもしれない）を選ぶことができることを示したが，実はもう少し弱い条件で十分なのである。その条件とは非循環性と呼ばれるものである。以下前稿と同様に選択肢の集合を A で，個人の集合を N で表す。

非循環性 (acyclicity)　集合 A に属する選択肢 x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_k を任意にいくつか選ぶとすると，社会的選好において $x_1Px_2Px_3P\cdots Px_k$ であって，x_kPx_1 となるようなものがないとき，社会的選好は非循環的 (acyclic) であると言う。

これは準推移性より弱い条件である。例えば xPy，yPz であって xIz ならば準推移性は満たされないが非循環性は満たされている。この非循環性について次の定理が示される。

定理 1.1. 社会的な選好 R が完備性，反射性，非循環性を満たせば複数の選択肢の中から最良のものを選び出すことができる。逆に，複数の選択肢の中から最良のものを選び出すことができるならば完備性，反射性を満たす社会的な選好は非循環性を満たす。すなわち，非循環性は完備性，反射性を満たす社会的選択ルールが最良のものを選び出すことができるための必要十分条件である。

証明. 後半から証明する。R が非循環的でないと仮定してみよう。そのとき $x_1Px_2Px_3P\cdots Px_k$ であって x_kPx_1 となるような選択肢の組がある。すると，どの選択肢も他のすべての選択肢より選好されるかまたは無差別とはなっていないのでこの集合の中に最良のものは存在しない。したがって非循環性が成り立たなければ最良のものを選び出すことはできない。

次に前半を示す。すべての選択肢について社会的選好が無差別となるならばすべてが最良である。したがって少なくとも1つの選択肢の組について厳密な選好 (P) が成り立つと仮定し，その関係を x_2Px_1 とする。x_2 が全体 (A) の中で最良とならないのは別の選択肢 x_3 があって x_3Px_2 となる場合だけである（そのような選択肢が A の中に存在しなければ x_2 が全体の中で最良である)。そのような x_3 があると仮定すると，もし x_1Px_3 であるならば非循環

性によって x_1Rx_2 でなければならない（x_1Px_3，x_3Px_2 であるから非循環性によって x_2Px_1 となってはならない)。しかしこれは x_2Px_1 という仮定と矛盾する。よって x_1Px_3 ではなく x_3Rx_1 でなければならず x_3 は (x_1, x_2, x_3) の 3 つの選択肢の中で最良のものとなる。次に，x_3 が (x_1, x_2, x_3) の中で最良である（x_1 も x_2 も最良ではない）として x_4 を加える。x_3Rx_4 ならば x_3 が 4 つの中で最良である。x_4Px_3 のとき，仮定によって x_3Px_2 かつ x_2Px_1 であるが非循環性によって x_2Px_4 や x_1Px_4 とはならない。したがって x_4Rx_2，x_4Rx_1 であるから x_4 は 4 つの中で最良である。このようにして選択肢を 1 つづつ加えていくことによって A 全体を検討すれば少なくとも 1 つ最良のものが存在することがわかる。 ☺

したがって非循環性さえ満たされれば社会的な選択は可能であり（十分条件)，また非循環性が満たされなければ社会的な選択はできない（必要条件)。

1.2 『阻止的』と『ほとんど阻止的』

まず前稿において定義した『決定的』，『ほとんど決定的』に加えこれらと対になる言葉,『阻止的』と『ほとんど阻止的』を定義する(1。後者は

ほとんど阻止的 (almost blocking) 2 つの選択肢 x, y があり, 全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が y より x を好み (xP_iy), V に属さない残りのすべての人々が x より y を好む (yP_ix) とき, 社会的に x より y が選好される (yPx) ことはない, すなわち社会的に y より x が選好されるかまたは両者が無差別である (xRy) ならば, グループ V は y **に対して** x **についてほとんど阻止的である**と言う。

つまり, あるグループの人々が y より x を好み, 残りの人々が x より y より好むという逆の選好を持つときにその逆の選好が社会的な選好となることはない, 言い換えればそのグループの選好が社会的な選好となるかまたは x, y が無差別になる場合にほとんど阻止的となる。これに対して『阻止的』というのは

阻止的 (blocking) 2 つの選択肢 x, y があり, 全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が y より x を好む (xP_iy) とき, 社会的に x より y が選好される (yPx) ことはない, すなわち社会的に y より x が選好されるかまたは両者が無差別である (xRy) ならば, グループ V は y **に対して** x **について阻止的である**と言う。

と定義される。『ほとんど阻止的』との違いは残りの人々がグループ V の人々と逆の選好を持つとは仮定していないことであり『ほとんど阻止的』よりも意味が強くなっている。

阻止的というのは自分（達）が嫌いなものが社会的に選ばれるのを防ぐ（あるいは阻止する, 拒否する）ことができるという意味である。拒否権 (veto, veto power) とはまさにそのような意味であり, 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて阻止的であるようなグループの人数が 1 人であればそれが拒否権者となる。要約すると拒否権者は次のように定義される。

拒否権者 (vetoer) 拒否権者とは 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて阻止的であるような個人を指す。

(1 『阻止的 (blocking)』，『ほとんど阻止的 (almost blocking)』の用語は鈴村 (1982) による。Sen (1979) およびその邦訳では『半決定的 (semi-decisive)』，『ほとんど半決定的 (almost semi-decisive)』という用語が用いられている。

独裁者は１人に限られるが拒否権者は１人とは限らない。全員が拒否権者になる（1 人 1 人があらゆる選択肢の組み合わせについて阻止的であるようなグループを構成する）こともあり得る。

1.3　非循環性と拒否権者定理

完備性，反射性，非循環性を合わせて**非循環的合理性**と呼ぶことにする。しかし，非循環的合理性だけでは拒否権者の存在を導くことはできず前稿の単純多数決のところで取り上げた『正の反応性』を必要とする。その意味を確認しておこう。

条件 S：正の反応性 (positive responsiveness) 2 つの選択肢 x と y について，ある人の選好が y よりも x を好む方向に変化し（yP_ix から xI_iy または xP_iy へ，あるいは xI_iy から xP_iy へ）他の人々の選好が変わらないとき，変化する前の社会的選好において x と y が無差別であれば y よりも x を好む選好に（xIy から xPy に）変化しなければならない。また変化する前に y よりも x を好む選好（xPy）であれば変化した後もそうである。

準完全合理性（完備性，反射性，準推移性）を非循環的合理性に弱め，正の反応性（条件 S）を仮定した場合の拒否権者定理は次のように表現される[2]。

非循環性の場合の拒否権者定理 社会を構成する人々の数が 4 人以上ならば完備性，反射性，非循環性，条件 U，P，I，S，D を満たす社会的選択ルールには拒否権者が存在する。

条件 U，P，I，D について確認しておこう。

条件 U: 定義域の非限定性 (unrestricted domain) 人々の選好についてはいかなるものも許される。

条件 P：パレート原理 (Pareto Principle) ある社会（集合 N）に属する個人全員が y より x を好むという選好を持っていれば社会的にもそのように判断するのが適当である。記号で書けば

> A に属する異なる 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせ (x, y) に関して，N に属するすべての個人 i が xP_iy であれば xPy である

条件 I：無関係な選択対象からの独立性 (independence of irrelevant alternatives(IIA)) 異なる 2 つの選択肢 x と y についての社会的な選好はその 2 つについての個人の選好のみによって決まり，第 3 の選択肢（例えば z）と x あるいは y についての選好にはよらない。

条件 D：独裁者 (dictator) がいないこと 独裁者とはある個人が選好する選択肢が社会的にも選好されるような個人を指す。すなわち

> すべての異なる x, y について xP_iy ならば xPy（yP_ix ならば yPx）となる

ような個人である。

[2] この定理は Mas-colell and Sonnenschein (1972) による。

アローの定理の証明と同様の手順で証明を進める。ここでは社会を構成する個人の人数 n は 4 人以上であると仮定する。選択肢の数はこれまで同様 3 以上である。

証明の前にこの定理に条件 S が必要なことを次の例によって確かめてみよう。

条件 S だけを満たさない社会的選択ルール 次のような社会的選択ルールを考える（社会の構成人数を m で表す）。

（1）特定の選択肢の組 $(x,\ y)$ をとり $m-1$ 人以上の人々が xP_iy ならば xPy，$m-1$ 人以上の人々が yP_ix ならば yPx，さもなくば xIy とする。

（2）$(x,\ y)$ 以外の選択肢の組 $(u,\ v)$（片方のみが x，y と異なるものを含む）については m 人すべての人々が uP_iv ならば uPv，すべての人々が vP_iu ならば vPu，さもなくば uIv とする。

ある選択肢の組についてすべての人々がどちらかを選好すれば社会的にもそうなるのでこの社会的選択ルールは条件 P を満たす。選択肢を 2 つづつ比べるから条件 I（無関係な選択対象からの独立性）も満たしている。$(x,\ y)$ の組に関しては 1 人が yP_ix であっても社会的に yRx になるとは限らず，逆に 1 人が xP_iy であっても社会的に xRy になるとは限らないので拒否権者も独裁者もいない。3 つの選択肢 u，v，w について uPv，vPw であれば $m-1$ 人以上の人々が uP_iv という選好を持ち，同じく $m-1$ 人以上の人々が vP_iw という選好を持っている。したがって $m-2$ 人以上の人々がその両方の選好を持ち，個人の選好の推移性から uP_iw という選好を持つ。そのとき少なくとも wPu となることはないので非循環性が成り立つ。しかし例えば $m-3$ 人の選好が uP_iv で残りの人々の選好が vR_iu のときに（そのとき uIv である），1 人の人の選好が vP_iu から uI_iv あるいは uP_iv に変わっても $m-1$ 人以上が uP_iv とはならないので条件 S は満たさない。

まず定理の証明に必要な次の 2 つの補助定理を示す。

補助定理 1.1. 4 人以上の社会において社会的選択ルールが非循環的合理性，条件 U，P，I，S を満たし，ある 2 つの選択肢 x，y に関して，y に対して x についてほとんど阻止的であるような個人が存在するならばその個人は 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて阻止的である，すなわち拒否権者である。

証明. y に対して x についてほとんど阻止的であるような個人を個人 1 とし，x，y 以外の任意の（x，y 以外のあらゆる選択肢から適当に 1 つ選んだ）選択肢 z，w をとって以下のような選好の組み合わせを考える。

（1）個人 1：$wP_1xP_1yP_1z$

（2）個人 2：$wP_2xI_2yP_2z$

（3）個人 3：$yP_3wP_3zP_3x$

（4）個人 4：$yP_4wP_4zP_4x$

（5）上記以外の人々：$yP_iwP_izP_ix$

仮定によって xRy であるが，さらに条件Sによって xPy である[3]。また条件Pによって yPz，wPx である。したがって非循環性により xRz，wRy となる。次に以下のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人1：$wP_1yP_1xP_1z$

(2) 個人2：$wP_2yP_2xP_2z$

(3) 個人3：$zP_3yP_3xP_3w$

(4) 個人4：$yI_4wP_4zI_4x$

(5) 上記以外の人々：$zP_iyP_ixP_iw$

上の結果と条件S，Iによって xPz，wPy が得られる[4]。また条件Pによって yPx である。したがって非循環性により yRz，wRx となる。次に以下のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人1：$wP_1xP_1yP_1z$

(2) 個人2：$yP_2zP_2wP_2x$

(3) 個人3：$xI_3yI_3zI_3w$

(4) 個人4：$yP_4zP_4wP_4x$

(5) 上記以外の人々：$zP_iyP_ixP_iw$

仮定と条件Sによって xPy である[5]。また上の結果と条件S，Iによって yPz，wPx である[6]。したがって非循環性により xRz，wRy となる。次に以下のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人1：$wP_1yP_1xP_1z$

(2) 個人2：$zP_2yP_2xP_2w$

(3) 個人3：$wP_3yP_3xP_3z$

(4) 個人4：$zP_4yP_4xP_4w$

(5) 上記以外の人々：$zP_iyP_ixP_iw$

上の結果と条件S，Iによって xPz，wPy が得られる[7]。また条件Pによって yPx である。したがって非循環性により yRz，wRx となる。最後に以下のような選好の組み合わせを考える。

---

[3] 個人2の選好において xI_2y であり（yP_2x が xI_2y に変わったと見なすことができる），個人1，2以外の人々の選好において yP_ix となっていることによる。

[4] 個人4の選好において zP_4x が zI_4x に，yP_4w が yI_4w に変わっている。他の人々の x と z，y と w に関する選好は変わっていない。

[5] 個人3の選好において xI_3y であり（yP_3x が xI_3y に変わったと見なすことができる），個人1，3以外の人々の選好において yP_ix となっている。

[6] 個人3の選好において zP_3y が yI_3z に，xP_3w が xI_3w に変わっている。他の人々の y と z，x と w に関する選好は変わっていない。

[7] 個人3の選好において xI_3z が xP_3z に，yI_3w が wP_3y に変わっている。他の人々の x と z，y と w に関する選好は変わっていない。

(1) 個人 1：$wP_1xP_1yP_1z$

(2) 個人 2：$zP_2xI_2yP_2w$

(3) 個人 3：$yP_3zP_3wP_3x$

(4) 個人 4：$yI_4zP_4xI_4w$

(5) 上記以外の人々：$zP_iyP_ixP_iw$

仮定と条件 S，I によって xPy である[8]。また上の結果と条件 S によって yPz，wPx である[9]。したがって非循環性により xRz，wRy となる。この選好の組み合わせにおいては個人 1 のみが xP_1z，wP_1y という選好を持ち，他のすべての人々は逆の選好（zP_ix，yP_iw）を持っている。したがって，個人 1 は z に対して x についてほとんど阻止的であり，y に対して w についてほとんど阻止的である。この論理を繰り返し用いると個人 1 はあらゆる選択肢の組み合わせについてほとんど阻止的となるが，条件 S によりこれは個人 1 があらゆる選択肢の組み合わせについて阻止的であること，すなわち拒否権者であることを意味することがわかる。条件 S を仮定すると，個人 1 以外の人々の選好が個人 1 が好む選択肢にとって有利なように変化すれば社会的にもそうなるので，『ほとんど阻止的』が『阻止的』を意味する。 ☺

続いて次の補助定理を示す。

補助定理 1.2. (1) 社会的選択ルールは非循環的合理性を満たし拒否権者はいないものとする。そのとき任意の 2 つの選択肢 x，y について $n-1$ 人の人々が xP_iy という選好を持ち，1 人の人が yP_ix という選好を持っているときには社会的に xPy である。

(2) 社会的選択ルールは非循環的合理性，条件 U，I，P，S を満たし，拒否権者はいないものとする。任意の 2 つの選択肢 x，y について $n-k$ 人の人々が xP_iy，$k-1$ 人の人々が xI_iy，1 人の人が yP_ix という選好を持っているときに社会的に xPy であるならば $n-k-1$ 人の人々が xP_iy，k 人の人々が xI_iy，1 人の人が yP_ix という選好を持っているときにも xPy である。ただし k は正の整数で $1 \leqq k \leqq n-1$ である。

証明. (1) もし他のすべての人々が xP_iy で 1 人だけが yP_ix のときに yRx となるような選択肢の組 (x, y) があるならば，その 1 人は y に対して x についてほとんど阻止的となり補助定理 1.1によって拒否権者となってしまうから，そのような選択肢の組があってはならない。

(2) 任意に 3 つの選択肢 x，y，z を選び，次のような選好の組み合わせを考える。

(i) $n-k-1$ 人の人々：xP_iyP_iz

(ii) 1 人の人：zP_ixP_iy

(iii) 1 人の人：yP_izP_ix

(iv) $k-1$ 人の人：xI_iyI_iz

[8] 個人 2 の選好において xI_2y であり，個人 1，2 以外の人々の選好において yP_ix となっている。

[9] 個人 4 の選好において zP_4y が yI_4z に，xP_4w が xI_4w に変わっている。他の人々の y と z，x と w に関する選好は変わっていない。

$n-k$ 人の人々が xP_iy で 1 人が yP_ix，$k-1$ 人が xI_iy，同じく $n-k$ 人の人々が yP_iz で 1 人が zP_iy，$k-1$ 人が yI_iz であるから仮定により xPy，yPz となる。したがって非循環性によって xRz を得る。このとき xP_iz という選好を持つ人は $n-k-1$ 人，zP_ix という選好を持つ人は 2 人，xI_iz という選好を持つ人は $k-1$ 人である。ここで 1 人の選好が zP_ix から xI_iz に変わったとすると条件 S によって社会的には xPz とならなければならない。そのとき xP_iz という選好を持つ人は $n-k-1$ 人，zP_ix という選好を持つ人は 1 人，xI_iz という選好を持つ人は k 人である。x，y，z は任意であるから条件 I によって補助定理の主張が成り立つ。

☺

これは $k=n-1$ の場合にも成り立つ。

この補助定理によって次の形の，準推移性に代えて非循環性が成り立つ場合の拒否権者定理が証明される。

定理 1.2 (非循環性と拒否権者定理). 完備性，反射性，条件 U，I，P，S を満たし，拒否権者がいない社会的選択ルールは非循環性を満たさない。

証明. もし非循環性が満たされるとするなら，補助定理 1.2の (1) から出発して (2) を繰り返し適用して行くと，$k=n-1$ の場合に $n-1$ 人の人々が xI_iy，1 人の人が yP_ix という選好を持っているときに xPy であることになる。そうすると条件 S によって全員が xI_iy であるときにも xPy である。x，y は任意であるから同じく全員が xI_iy であるときに yPx であることになるが[10]，これは矛盾である。 ☺

以上で証明が終わった。

2　パレート原理を仮定しない不可能性定理—ウィルソンの定理

2.1　非賦課性，逆に決定的，逆独裁者

すべての人が y より x を好むときには社会的にもそうあらねばならないというパレート原理（条件 P）はたいへん常識に叶った要求だと思われるが，この条件を仮定しない場合でも独裁的でないまでもそれに近い，あるいはよく似た社会的選択ルールしか実現可能でないことを示そう。

ただパレート原理をはずすということではなく，それより弱い次の条件を仮定する。

非賦課性 (non imposition) ある 2 つの選択肢の組 (x, y) があり，個人の選好がいかなるものであっても常に社会的に xPy となる（y より x が選好される）とき，社会的選択ルールは**賦課的**であると言う。どの 2 つの選択肢の組も賦課的でないとき，社会的選択ルールは非賦課的であると言う。

非賦課的であれば yRx となるような人々の選好の組み合わせが少なくとも 1 つはある。これは社会的選好にタブーがあってはならないという条件である。パレート原理が満たされれば非賦課性も満たされるが逆は必ずしも言えない。条件 U（定義域の非限定性）は仮定し続ける。

[10] x と y を入れ替えて考えれば『$n-1$ 人の人々が xI_iy，1 人の人が xP_iy という選好を持っているときに yPx である。』が得られる。

次に『逆にほとんど決定的』(inversely almost decisive),『逆に決定的』(inversely decisive),『逆独裁者 (inverse-dictator)』という言葉を定義する。

逆にほとんど決定的 2つの選択肢 x, y があり，全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が x より y を好み (yP_ix)，V に属さない残りのすべての人々が y より x を好む (xP_iy) とき，常に社会的に y より x が選好される (xPy) ならば，グループ V は x **に対して** y **について逆にほとんど決定的である**と言う。

逆に決定的 2つの選択肢 x, y があり，全体の集合 N に含まれる個人のグループ V に属するすべての人々が x より y を好む (yP_ix) とき，常に社会的に y より x が選好される (xPy) ならば，グループ V は x **に対して** y **について逆に決定的である**と言う。

逆独裁者 逆独裁者とは2つの選択肢のあらゆる組み合わせについて逆に決定的であるような1人の個人を指す。

すなわち2つの選択肢のあらゆる組み合わせについて逆に決定的なグループの人数が1人であれば，その1人が逆独裁者となる。社会的な選好が『他の人々の選好に関わりなく常に逆独裁者の選好とは逆になる』ということであるから，ある意味で独裁的である。

また，すべての選択肢を無差別とするような社会的選択ルールは**無意味** *(null)* であると言うことにする。

2.2 ウィルソンの定理の証明

ここでは次の定理を証明する(11。

定理 2.1 (ウィルソンの定理). 非賦課性，完全合理性，条件 U，I を満たす無意味でない社会的選択ルールには独裁者または逆独裁者が存在する。

初めに次の補助定理を示す。

補助定理 2.1. 非賦課性，完全合理性，条件 U，I を満たす社会的選択ルールについて，次の (1)，(2)，(3) のいずれかが成り立つ(12。

(1) パレート原理：任意の2つの選択肢の組 (x, y) について，すべての人が xP_iy であれば xPy である。

(2) 逆パレート原理：任意の2つの選択肢の組 (x, y) について，すべての人が yP_ix であれば xPy である。

(3) 社会的選択ルールは無意味である。

証明. (1) ある2つの異なる選択肢 x, y についてすべての人が xP_iy のとき社会的に xPy であるとする。別の選択肢 z をとると，非賦課性の仮定により yRz となるような人々の選好の組み合わせがある。それを a とする。別の選好の組み合わせ b をとり，b にお

(11 これは Wilson (1972) による。
(12 この補助定理の証明は Malawski and Zhou (1994) による。

いては y と z に関する人々の選好は a におけるものとまったく同じであり，またすべての人々が $xP_i^b z$ であるとする。すると社会的選好の推移性によって xPy かつ yRz から xPz が得られる。条件 I により x と z についての社会的選好はその 2 つの選択肢に関する人々の選好によって決まるのですべての人々が xP_iz のときには常に xPz となることがわかる。

同様に非賦課性の仮定により zRx となるような人々の選好の組み合わせがある。それを a' とする。別の選好の組み合わせ b' をとり，b' においては x と z に関する人々の選好は a' におけるものとまったく同じであり，またすべての人々が $zP_i^{b'}y$ であるとする。すると社会的選好の推移性によって zRx かつ xPy から zPy が得られる。条件 I により y と z についての社会的選好はその 2 つの選択肢に関する人々の選好によって決まるのですべての人々が zP_iy のときには常に zPy となることがわかる。

この論理を繰り返すと，すべての人々が xP_iy のときに社会的に xPy となるような 2 つの異なる選択肢 x，y の組があれば，任意の 2 つの選択肢の組 x，y について，すべての人々が xP_iy であれば xPy となることが言える。

(2) ある 2 つの異なる選択肢 x，y についてすべての人が xP_iy のとき社会的に yPx であるとする。別の選択肢 z をとると，非賦課性の仮定により zRy となるような人々の選好の組み合わせがある。それを a とする。別の選好の組み合わせ b をとり，b においては y と z に関する人々の選好は a におけるものとまったく同じであり，またすべての人々が $xP_i^b z$ であるとする。すると社会的選好の推移性によって zRy かつ yPx から zPx が得られる。条件 I により x と z についての社会的選好はその 2 つの選択肢に関する人々の選好によって決まるのですべての人々が xP_iz のときには常に zPx となることがわかる。

同様に非賦課性の仮定により xRz となるような人々の選好の組み合わせがあるからそれを a' とする。別の選好の組み合わせ b' をとり，b' においては x と z に関する人々の選好は a' におけるものとまったく同じであり，またすべての人々が $zP_i^{b'}y$ であるとする。すると社会的選好の推移性によって yPx かつ xRz から yPz が得られる。条件 I により y と z についての社会的選好はその 2 つの選択肢に関する人々の選好によって決まるのですべての人々が zP_iy のときには常に yPz となることがわかる。

この論理を繰り返すと，すべての人々が xP_iy のときに社会的に yPx となるような 2 つの異なる選択肢 x，y の組があれば，任意の 2 つの選択肢の組 x，y について，すべての人々が xP_iy であれば yPx となることが言える。

(3) 最後にある 2 つの選択肢 x，y について，すべての人々が xP_iy のときに xIy であると仮定する。このとき上の (1)，(2) の議論から任意の 2 つの選択肢の組 x，y についてすべての人々が xP_iy であれば xIy となることがわかる[13]。すべての人々が xP_iy あるいは yP_ix ではないある選好の組み合わせ a において xPy となるような選択肢の組 x，y があるものと仮定してみよう。別の選好の組み合わせ b をとり，x と y に関する人々の選好は a におけるものとまったく同じであり，またすべての人々が $xP_i^b z$ かつ $yP_i^b z$ であるとする。そのときには xIz かつ yIz でなければならない。すると社会的選好の推

[13] すべての人々が xP_iy のときに xPy あるいは yPx となるような選択肢の組が 1 つでもあればあらゆる選択肢の組についてそのようになるということが (1)，(2) の議論からわかる。

移性によって xIy となるが，これは xPy という仮定と矛盾する。したがって xPy となるような選好の組み合わせおよび選択肢の組はないから，社会的選択ルールは無意味である。

☺

(1) の場合はアローの一般可能性定理によって完全合理性，条件 U，I を満たす社会的選択ルールには独裁者が存在することが言える。したがって (2) の場合に完全合理性，条件 U，I を満たす社会的選択ルールに逆独裁者が存在することが示されればウィルソンの定理が証明されたことになる。アローの定理の証明の手順をそのまま使ってこれを示そう。そのためにまず次の補助定理が必要である。

補助定理 2.2. 社会的選択ルールが完全合理性，条件 U，I，逆パレート原理を満たし，またある 2 つの選択肢 x，y に関して，x に対して y について逆にほとんど決定的であるような個人が存在するならば，その個人は 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて逆に決定的である，すなわち逆独裁者である。

証明. そのような個人を J で表し，J 以外の人々を i で表す。x，y 以外のある選択肢を z とし，次のような選好の組み合わせを考える（条件 U によって許される，以下同様)。

（1）個人 J：zP_JyP_Jx

（2）個人 J 以外のすべての人々：xP_iy，zP_iy

J 以外の人々について x と z との間の選好に関しては何も仮定していない。個人 J は x に対して y について逆にほとんど決定的であるから社会的に xPy となる。また J を含むすべての人々が x より z を好むので逆パレート原理によって yPz である。すると P の推移性によって xPz が得られる。J 以外の人々については x と z との間の選好に関して何も仮定せず，また条件 I によって x と y あるいは y と z の間の選好は x と z の間の選好に影響してはならないから，個人 J は x に対して z について逆に決定的である。

次に以下のような選好の組み合わせを考える。

（1）個人 J：yP_JxP_Jz

（2）個人 J 以外のすべての人々：xP_iz，xP_iy

個人 J 以外の人々について y と z との間の選好に関しては何も仮定していない。逆パレート原理によって zPx が得られる。上と同様に個人 J は x に対して y について逆にほとんど決定的であることから xPy である。すると P の推移性によって zPy が得られるから，上と同じ論法によって個人 J は z に対して y について逆に決定的である。

以上の議論を繰り返し適用することによって個人 J は 2 つの選択肢のあらゆる組み合わせについて逆に決定的であることが導かれる。 ☺

その上で次の補助定理を示す。

補助定理 2.3. （1）社会的選択ルールは完全合理性を満たし逆独裁者はいないものとする。そのとき任意の 2 つの選択肢 x，y について $n-1$ 人の人々が yP_ix という選好を持ち，1 人の人が xP_iy という選好を持っているときには社会的に xRy である。

(2) 社会的選択ルールは完全合理性，条件 U，I，逆パレート原理を満たし，逆独裁者はいないものとする。任意の 2 つの選択肢 x，y について $n-k$ 人の人々が yP_ix，k 人の人々が xP_iy という選好を持っているときに社会的に xRy であるならば $n-k-1$ 人の人々が yP_ix，$k+1$ 人の人々が xP_iy という選好を持っているときにも xRy である。ただし k は正の整数で $1 \leqq k \leqq n-1$ である。

証明． (1) もし他のすべての人々が yP_ix で 1 人だけが xP_iy のときに yPx となるような選択肢の組 (x, y) があるならば，その 1 人は x に対して y について逆にほとんど決定的となり補助定理 2.2によって逆独裁者となってしまうから，そのような選択肢の組があってはならない。

(2) 任意に 3 つの選択肢 x，y，z を選び，次のような選好の組み合わせを考える。

(i) $n-k-1$ 人の人々：yP_ixP_iz

(ii) 1 人の人：zP_iyP_ix

(iii) 1 人の人：xP_izP_iy

(iv) $k-1$ 人の人：zP_ixP_iy

$n-k$ 人の人々が yP_ix で k 人が xP_iy，同じく $n-k$ 人の人々が xP_iz で k 人が zP_ix であるから仮定により xRy，zRx となる。したがって推移性によって zRy を得る。このとき yP_iz という選好を持つ人は $n-k-1$ 人，zP_iy という選好を持つ人は $k+1$ 人である。x，y，z は任意であるから補助定理の主張が成り立つ。

☺

これは k が $n-1$ の場合にも成り立つ。
この補助定理によって次の定理が証明される。

定理 2.2. 完備性，反射性，条件 U，I，逆パレート原理を満たし，逆独裁者がいない社会的選択ルールは推移性を満たさない。

証明．もし推移性が満たされるとするなら，補助定理 2.3の (1) から出発して (2) を繰り返し適用して行くと，$k=n-1$ の場合に n 人全員が xP_iy のときに xRy であることになる。これは逆パレート原理に反するから矛盾である。 ☺

以上でウィルソンの定理の証明が終わった。

3 確率的な社会的選好についての不可能性定理

3.1 確率的な社会的選好

これまで検討してきた社会的選択ルールは人々の選好に基づいて 2 つの選択肢の組に対する社会的な選好を構成するものであったが，ここでは社会的な選好を確率的に構成するような社会的選択ルールについてアローの定理に当るものを考えてみたい。とりあえずこれまでどおり人々の数は 2 以上，選択肢の数は 3 以上の有限な整数であると仮定する。また人々の

選好について無差別な関係を含まないものを考える[14]。個人および社会の選好は推移性を満たすものとし，条件 U（定義域の非限定性）を仮定する。

社会的な選好を確率的に構成するとは, 例えば x と y の 2 つの選択肢について人々の選好の何らかの組み合わせに対して確率 $\frac{1}{3}$ で xPy, 確率 $\frac{2}{3}$ で yPx などの確率を割り当てるものである。ある選好, 例えば xPy に確率 0 を割り当てるというものも含まれる。また xPy, yPx, xIy に割り当てられる確率の和は 1 でなければならない。ある選好の組み合わせ a において任意の 2 つの選択肢 x と y について xP_iy という選好を持つ人々の集合を $\varphi(a, xP_iy) = \{i \in N : xP_iy\}$ で表す。また a における確率的な社会的選択ルールを $g(a)$ で，$g(a)$ によって xPy に割り当てられる確率を $p(g(a), xPy)$ で表す。社会的な選好が推移性を満たすとは次のようなことを意味する。例えば $p(g(a), xPy) = \frac{1}{3}$ で $p(g(a), yPw) = 1$ ならば $\frac{1}{3}$ の確率で社会的に $xPyPw$ となる。一方 $wPyPx$ となることはなく，yPx のときには yPx かつ yPw となる可能性があるだけである。そのとき x と w の間の社会的選好は一意 (どれか 1 つには) には決まらず xPw となることも wPx となることもありうる。したがって $p(g(a), xPw) \geqq \frac{1}{3} = p(g(a), xPy)$ となる。

まず $g(a)$ について二項的という性質とパレート原理を定義する。

二項的 (binary) 2 つの選択肢 x と y について，ある選好の組み合わせ a において xP_iy である人々と別の選好の組み合わせ b において xP_iy である人々とがまったく同じであれば[15]，a において xPy に割り当てられる確率と b において xPy に割り当てられる確率とは等しい。

式で表せば

$$\varphi(a, xP_iy) = \varphi(b, xP_iy) \text{ ならば } p(g(a), xPy) = p(g(b), xPy)$$

これはアローの定理における条件 I（無関係な選択対象からの独立性）を一般化したものになっている。$p(g(a), xPy) = p(g(b), xPy) = 1$ の場合が条件 I に相当する。

パレート原理 (Pareto Principle) ある選好の組み合わせ a においてすべての人々が xP_iy という選好を持つならば xPy に割り当てられる確率は 1 である。式で書けば

$$\varphi(a, xP_iy) = N \text{ ならば } p(g(a), xPy) = 1$$

この条件はこれまで仮定してきた条件 P と本質的に同じものである。

$\varphi(a, yP_ix) = \varnothing$ ならば $\varphi(a, xP_iy) = N$ であるから（$\varnothing$ は空集合（要素が何もない集合)），

$$\varphi(a, xP_iy) = \varnothing \text{ ならば } p(g(a), xPy) = 0$$

が導かれる。

[14] 以下の内容は Barberá and Sonnenschein (1978) による。

[15] 人数が等しいだけではなくまったく同じ人々が xP_iy という選好を持っている。

3.2 確率的な社会的選好についての不可能性定理

まず次の補助定理を示す。

補助定理 3.1. 二項的でパレート原理を満たす確率的な社会的選択ルール g に関して，2 つの選好の組み合わせ a，b，任意の 4 つの選択肢 x，y，z，w について

$$\varphi(a, xP_iy) = \varphi(b, zP_iw) \text{ ならば } p(g(a), xPy) = p(g(b), zPw)$$

である。

証明. パレート原理により，$\varphi(a, xP_iy) = N$ または $\varphi(a, xP_iy) = \emptyset$ のときは明らかに成り立つ。$\varphi(a, xP_iy) \neq N, \emptyset$ の場合を考える。

まず $x = z$ と仮定して補助定理を示す。次のような選好の組み合わせを考えそれを c とする。

(1) $\varphi(a, xP_iy)$ に属する人々：xP_iyP_iw

(2) $\varphi(a, yP_ix)$ に属する人々：yP_iwP_ix

パレート原理により $p(g(c), yPw) = 1$ である。したがって社会的選好の推移性によって

$$p(g(c), xPw) \geqq p(g(c), xPy) \tag{3.1}$$

が得られる。これは yPw より xPy ならば xPw であることからわかる。次に以下のような選好の組み合わせを考えそれを d とする。

(1) $\varphi(a, xP_iy)$ に属する人々：xP_iwP_iy

(2) $\varphi(a, yP_ix)$ に属する人々：wP_iyP_ix

パレート原理により $p(g(d), wPy) = 1$ である。したがって社会的選好の推移性によって $p(g(d), wPx) \geqq p(g(d), yPx)$ が得られる。これは

$$p(g(d), xPy) \geqq p(g(d), xPw) \tag{3.2}$$

を意味する。wPy より xPw ならば xPy である。したがって (3.1)，(3.2) および二項性 (binarity) によって

$$p(g(c), xPy) = p(g(d), xPw)$$

が導かれる。

次に $y = w$ と仮定し以下のような選好の組み合わせを考えそれを c' とする。

(1) $\varphi(a, xP_iy)$ に属する人々：zP_ixP_iy

(2) $\varphi(a, yP_ix)$ に属する人々：yP_izP_ix

パレート原理により $p(g(c'), zPx) = 1$ である。したがって社会的選好の推移性によって

$$p(g(c'), zPy) \geqq p(g(c'), xPy) \tag{3.3}$$

が得られる。次に以下のような選好の組み合わせを考えそれを d' とする。

(1) $\varphi(a, xP_iy)$ に属する人々：xP_izP_iy

(2) $\varphi(a, yP_ix)$ に属する人々：yP_ixP_iz

パレート原理により $p(g(d'), xPz) = 1$ である。したがって社会的選好の推移性によって $p(g(d'), yPz) \geqq p(g(d'), yPx)$ が得られる。これは

$$p(g(d'), xPy) \geqq p(g(d'), zPy) \tag{3.4}$$

を意味する。したがって (3.3)，(3.4) および二項性によって

$$p(g(c'), xPy) = p(g(d'), zPy)$$

が導かれる。

以上の論理を繰り返し使えば補助定理の主張が示される。☺

これはあるグループの人々が xP_iy という選好を持つときに（そのとき他の人々は yP_ix という選好を持つ）xPy に割り当てられる確率と，まったく同じグループの人々が zP_iw という選好を持つときに（そのとき他の人々は wP_iz という選好を持つ）zPw に割り当てられる確率とが等しいことを主張するものであり，『あるグループが y に対して x についてほとんど決定的ならば任意の z，w に関して，w に対して z について決定的である』というアローの定理の証明において用いた補助定理の内容の一部を確率的な社会的選択ルールに対応して修正した形になっている。

次に以下の結論を示す。

補助定理 3.2 (社会的選択ルールが素直 (non perverse) であること). 二項的でパレート原理を満たす確率的な社会的選択ルール g に関して，2 つの選好の組み合わせ a，b，任意の 2 つの選択肢 x，y について

$$\varphi(a, xP_iy) \supset \varphi(b, xP_iy) \text{ ならば } p(g(a), xPy) \geqq p(g(b), xPy)$$

である。

このとき社会的選択ルールは素直 (non perverse) であると言う。

証明. $\varphi(a, xP_iy)$ が $\varphi(b, xP_iy)$ より 1 人多いものと仮定する。その 1 人を個人 i とし，x，y 以外の選択肢 z をとって次のような選好の組み合わせ c を考える。

(1) 個人 i：yP_ixP_iz

(2) i 以外の $\varphi(a, xP_iy)$ に属する人々：xP_iyP_iz

(3) $\varphi(a, yP_ix)$ に属する人々：yP_izP_ix

a において xP_iy という選好を持つ人々と c において xP_iz という選好を持つ人々は一致するので補助定理 3.1より

$$p(g(a), xPy) = p(g(c), xPz) \tag{3.5}$$

を得る。またパレート原理によって $p(g(c), yPz) = 1$ である。したがって社会的選好の推移性から

$$p(g(c), xPz) \geqq p(g(c), xPy) \tag{3.6}$$

となるから，(3.5) と (3.6) を合わせれば $p(g(c), xPy) \leqq p(g(a), xPy)$ が導かれる。b において xP_iy という選好を持つ人々と c において xP_iy という選好を持つ人々は一致するので

$$p(g(b), xPy) \leqq p(g(a), xPy)$$

を得る。 ☺

以上の準備のもとに次の定理を示す。

定理 3.1. $\mu_g(\varphi(a, xP_iy)) = p(g(a), xPy)$ というように関数 μ_g を定義する。μ_g は人々の集合に値を割り当てる関数である。二項性によって μ_g の値は x，y 以外の選択肢についての人々の選好にはよらない。また補助定理 3.1により選択肢 x，y が何であるかは影響しない。したがって μ_g は人々の集合だけで定義される関数である。

このとき μ_g は以下の条件を満たす。

(1) $\mu_g(\emptyset) = 0$

(2) $\mu_g(C) + \mu_g(N - C) = 1$

(3) $C' \subset C$ のとき $\mu_g(C') \leqq \mu_g(C)$

(4) $\mu_g(C_1) + \mu_g(C_2) \geqq \mu_g(C_1 \cup C_2)$（劣加法性 (sub-additivity)）

ただし C は人々の集合を表す（すなわち $C \subset N$）。

証明. (1) は定義から明らか。(2) は $p(g(a), xPy) + p(g(a), yPx) = 1$ から導かれる。(3) は補助定理 3.2から得られる。

したがって (4) を示せばよい。人々の集合 C_1，C_2，3 つの選択肢 x，y，z をとり次のような選好の組み合わせを考えこれを a とする。

(1) C_1 に属する人々：xP_iyP_iz

(2) C_2 に属する人々：yP_izP_ix

(3) C_3（C_1，C_2 以外の人々の集合）に属する人々：zP_ixP_iy

すると

$$p(g(a), xPy) = \mu_g(C_1 \cup C_3)$$

$$p(g(a), yPz) = \mu_g(C_2 \cup C_2)$$

$$p(g(a), zPx) = \mu_g(C_1)$$

が得られる。確率 $p(g(a), xPy)$ で xPy となり，確率 $p(g(a), yPz)$ で yPz となるから，その和が 1 を越えるならば少なくとも $p(g(a), xPy) + p(g(a), yPz) - 1 = \mu_g(C_1 \cup C_3) + \mu_g(C_1 \cup C_2) - 1$ の確率で $xPyPz$ すなわち xPz となる。したがって

$$p(g(a), xPz) = \mu_g(C_1) \geqq \mu_g(C_1 \cup C_3) + \mu_g(C_1 \cup C_2) - 1$$

が得られる。(2) より $\mu_g(C_1 \cup C_3) = 1 - \mu_g(C_2)$ を用いれば

$$\mu_g(C_1) + \mu_g(C_2) \geqq \mu_g(C_1 \cup C_2)$$

が導かれる。 ☺

3.3　無差別な関係を含む場合

これまでの分析を個人の選好，および社会の選好において無差別な関係を含む場合に拡張する。やはり $g(a)$ が二項的であり，またパレート原理を満たすと仮定する。社会的な選好が無差別な関係を含む場合に確率的な社会的選好が推移性を満たすということの意味は以下のようである。例えば $p(g(a), xPy) = \frac{1}{3}$，$p(g(a), yPw) = \frac{1}{2}$，$p(g(a), yIw) = \frac{1}{2}$ ならば $\frac{1}{6}$ の確率で社会的に $xPyPw$，同じく $\frac{1}{6}$ の確率で $xPyIw$ となる。一方 $wPyPx$ となることはなく，yPx のときには yPx かつ yPw または yIw となる可能性があるだけである。そのとき x と w の間の社会的選好は一意には決まらず xPw となることも xIw となることも wPx となることもありうる。したがって $p(g(a), xPw) \geqq \frac{1}{6}$，$p(g(a), xIw) \geqq \frac{1}{6}$，また $p(g(a), xRw) \geqq \frac{1}{3}$ となる。

まず次の補助定理を示す。

補助定理 3.3. 二項的でパレート原理を満たす確率的な社会的選択ルール g に関して，任意の選好の組み合わせ a，および任意の 2 つの選択肢 x，y について

$$\varphi(a, xI_iy) = \varnothing \text{ ならば } p(g(a), xIy) = 0$$

である。すなわち x と y について無差別な人がいなければ社会的にも無差別とはならない。

証明. x，y 以外のある選択肢を z として次のような選好の組み合わせ b を考える。

(1) xP_izP_iy（a において xP_iy である人々，またその人々のみ）

(2) zP_iyP_ix（a において xP_iy である人々，またその人々のみ）

パレート原理によって $p(g(b), zPy) = 1$ であるから，推移性（zPy かつ yRx ならば zPx）によって

$$p(g(b), zPx) \geqq p(g(b), yPx) + p(g(b), yIx) \tag{3.7}$$

が得られる。次に以下のような選好の組み合わせ c を考える。

(1) xP_iyP_iz（a において xP_iy である人々，またその人々のみ）

(2) yP_izP_ix（a において xP_iy である人々，またその人々のみ）

パレート原理によって $p(g(c), yPz) = 1$ であるから，推移性（yPz かつ xRy ならば xPz）によって

$$p(g(c), xRz) \geqq p(g(c), xPz) \geqq p(g(c), xPy) + p(g(c), xIy) \tag{3.8}$$

が得られる。g が二項的であることと (3.7)，(3.8) より[16]

$$1 = p(g(b), zPx) + p(g(b), xRz) \geqq p(g(a), yPx) + p(g(a), xPy) + 2p(g(a), xIy)$$

を得る。$p(g(a), yPx) + p(g(a), xPy) + p(g(a), xIy) = 1$ であるから $p(g(a), xIy) = 0$ が導かれる。 ☺

[16] a と b において，および a と c において x と y に関する人々の選好は同じであり，b と c においては x と z に関する人々の選好が同じである。

これを用いて次の定理を証明する。

定理 3.2. 二項的でパレート原理を満たす社会的選択ルール g に対して以下のような関数 μ_g が存在する。

(1) 任意の a および x，y について $\mu_g(\varphi(a, xP_iy)) \leqq p(g(a), xPy)$ が成り立つ。

(2) $\varphi(a, xI_iy) = \varnothing$ の場合には $\mu_g(\varphi(a, xP_iy)) = p(g(a), xPy)$ が成り立つ。

さらに

(3) $\mu_g(\varnothing) = 0$

(4) $\mu_g(C) + \mu_g(N - C) = 1$

(5) $C' \subset C$ のとき $\mu_g(C') \leqq \mu_g(C)$

(6) $\mu_g(C_1) + \mu_g(C_2) \geqq \mu_g(C_1 \cup C_2)$（劣加法性 (sub-additivity)）

ただし C は人々の集合を表す（$C \subset N$）。

証明. まずすべての x，y について $\varphi(a, xI_iy) = \varnothing$ であるようなケースに限定して考える。すると補助定理3.3によって社会的な選好においても xIy のような関係はなく，定理3.1が適用できるから，$\mu_g(\varphi(a, xP_iy)) = p(g(a), xPy)$ および上の (3)，(4)，(5)，(6) を満たす μ_g が存在する。したがって上の (2) が成り立つ。次に一般的な選好 a を仮定し，以下のような選好の組み合わせ b を考える。

(1) xP_izP_iy（a において xP_iy である人々，またその人々のみ）

(2) yP_ixP_iz（a において yP_ix である人々，またその人々のみ）

(3) xI_iyP_iz（a において xI_iy である人々，またその人々のみ）

$\varphi(b, yI_iz) = \varnothing$，および $\varphi(a, xP_iy) = \varphi(b, zP_iy)$ であるから $p(g(b), zPy) = \mu_g(\varphi(b, zP_iy))$ が得られ，さらに補助定理3.1より $\mu_g(\varphi(b, zP_iy)) = \mu_g(\varphi(a, xP_iy))$ が得られる。またパレート原理によって $p(g(b), xPz) = 1$ となる。以上の議論，および g が二項的であること[17]と推移性によって[18]

$$p(g(a), xPy) = p(g(b), xPy) \geqq p(g(b), zPy) = \mu_g(\varphi(a, xP_iy))$$

が導かれる。 ☺

この定理がアローの定理の一般化であることは次の系によって示される。アローの定理で想定されている社会的選択ルールは，人々の選好にもとづいてある社会的な選好に確率1を割り当てるような確率的な社会的選択ルールの特殊ケースであると解釈できる。そのような社会的選択ルールを $w(a)$ で表すと，ある2つの選択肢 x，y について，例えば $p(g(a), xPy) = 1$ であれば $p(g(a), xIy) = p(g(a), yPx) = 0$ である。1か0以外の確率が割り当てられることはない。$w(a)$ を用いると独裁者の存在は次のように表現される。

[17] a と b において x と y に関する人々の選好は同じである。

[18] xPz より zPy ならば xPy である。

独裁者 個人 i が独裁者であるとは任意の x，y について

$$xP_iy \text{ のとき } p(w(a), xPy) = 1 \text{ となる}$$

ということである。

系 3.1. 上記の $w(a)$ が二項性とパレート原理を満たせば独裁者が存在する。

証明. $\mu_w(\varphi(a, xP_iy)) = p(w(a), xPy)$ と定義する。パレート原理により $\mu_w(N) = 1$ である。全員の集合 N はそれぞれの個人からなる和集合であるから，定理 3.1で示した劣加法性により $\mu_w(\{i\}) > 0$ となるような個人 i が存在する(19。$\mu_w(\{i\})$ の値は 1 か 0 以外にはなりえないので $\mu_w(\{i\}) = 1$ でなければならない。したがってこの個人 i は独裁者である。 ☺

4 複数の選択肢を選ぶ可能性のある社会的選択関数

4.1 一般化された単調性とパレート原理

ギバード・サタースウェイトの定理においては社会的選択関数によってただ 1 つの選択肢が選ばれるものと仮定されていたが，ここでは複数の選択肢を選ぶ可能性のある社会的選択関数の戦略的操作不可能性の問題について考えてみたい(20。前稿で議論したギバード・サタースウェイトの定理の証明法の 1 つを応用して考察する。

これまでと同様，個人の数 n は 2 以上の整数，選択肢の数は 3 以上の整数であるとし，人々の選好には制約を加えず，また個人の選好には無差別な関係も含まれるものとする。選好の組み合わせ a において社会的選択関数によって選ばれる選択肢の集合を $C(a)$ で表し，a における**社会的選択集合 (social choice set)** と呼ぶ。また選択肢全体の集合を A で表す。複数の選択肢が選ばれるとしても実際に実現するのはそのうちの 1 つであるから，各選択肢が実現する可能性について人々がある確率を想定すると考えるとともに，確率的に実現する状態についての人々の評価・判断を扱わなければならないので何らかの効用関数を設定する必要がある。ある選択肢 x が実現したときに個人 i が得る効用を $u_i(x)$ で表す。個人 i の選好が xP_iy であれば $u_i(x) > u_i(y)$（xI_iy であれば $u_i(x) = u_i(y)$）でなければならない。そのような効用関数を個人 i の選好（R_i）に**適した (fit)** 効用関数と呼ぶ。u_i はいわゆる期待効用の公理を満たすフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型の効用関数である。

以下においてもギバード・サタースウェイトの定理の場合と同様にすべての選択肢が社会的選択関数によって選ばれる可能性がある，すなわち『人々の選好の組み合わせによってはいかなる選択肢についても，それが社会的選択集合に含まれる可能性がある』と仮定するが，これはいかなる選択肢も社会的選択関数によって選ばれる 1 つまたは複数の選択肢の中に含まれるということであり，各選択肢が単独で選ばれることがあるとまでは仮定しない。また，社会的選択集合が人々の選好にかかわらず同一であるような場合は除外する。したがって社会的選択集合がすべての選択肢を含まない（少なくとも 1 つの選択肢が社会的選択集合から除かれる）ような選好の組み合わせが少なくとも 1 つはある。

(19 $\{i\}$ は個人 i 1 人からなる集合を表す。

(20 複数の選択肢を選ぶ可能性があるので社会的選択関数ではなく社会的選択対応 (social choice correspondence) と呼ぶべきかもしれない

戦略的操作不可能性 複数の選択肢が選ばれるときの戦略的操作不可能性について以下のように定義する[21]。

ある個人 i の選好だけが異なる選好の組み合わせ a，b において，$C(a)$，$C(b)$ をそれぞれの社会的選択集合とする。$C(a)$ に属して $C(b)$ に属さない選択肢の集合を $C(a)\backslash C(b)$，逆に $C(b)$ に属して $C(a)$ に属さない選択肢の集合を $C(b)\backslash C(a)$ と表す。また A に含まれるある選択肢 x が実現する可能性について個人 i が想定する確率を $p(x)$ で表す。このとき $C(a)$ および $C(b)$ に含まれる選択肢に限定した，a における個人 i の選好に適した効用関数 u_i^a による期待効用はそれぞれ

$$E_i^a(a) = \frac{1}{\sum_{x\in C(a)} p(x)} \sum_{x\in C(a)} p(x)u_i^a(x)$$

$$E_i^a(b) = \frac{1}{\sum_{x\in C(b)} p(x)} \sum_{x\in C(b)} p(x)u_i^a(x)$$

と表される。$C(a) = C(b)$ のときは $E_i^a(a) = E_i^a(b)$ である。$C(a)$ と $C(b)$ が異なっている場合にはそれぞれ

$$E_i^a(a) = \frac{\sum_{x\in C(a)\cap C(b)} p(x)u_i^a(x) + \sum_{y\in C(a)\backslash C(b)} p(y)u_i^a(y)}{\sum_{x\in C(a)\cap C(b)} p(x) + \sum_{y\in C(a)\backslash C(b)} p(y)} \tag{4.1}$$

$$E_i^a(b) = \frac{\sum_{x\in C(a)\cap C(b)} p(x)u_i^a(x) + \sum_{y\in C(b)\backslash C(a)} p(y)u_i^a(y)}{\sum_{x\in C(a)\cap C(b)} p(x) + \sum_{y\in C(b)\backslash C(a)} p(y)} \tag{4.2}$$

となる。どのような確率，どのような効用関数についても $E_i^a(a) \geqslant E_i^a(b)$ であれば社会的選択関数は戦略的に操作可能ではない。逆にある確率，ある効用関数について $E_i^a(a) < E_i^a(b)$ であれば，a において b の選好を表明した方がよりよい結果を実現できる可能性があるので個人 i にとって a において戦略的に操作可能となる。

以下 $p(x) = 0.8-\varepsilon$，$p(y) = 0.2$，$u_i^a(x) = 0$，$u_i^a(y) = 1$，$C(a)$ に含まれる選択肢のうち個人 i の効用が最も大きい選択肢を z として $u_i^a(z) = 2$ と仮定し，x，y 以外の選択肢の確率の合計を $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$ で表す。(4.1)，(4.2) から，ある $x \in C(a)$，$y \in C(b)\backslash C(a)$ について $yP_i^a x$ であれば，

$$E_i^a(b) \geqslant 0.2$$

$$E_i^a(a) < \frac{2}{0.8-\varepsilon}\varepsilon$$

が得られる。ε を十分小さく（$\varepsilon \leqslant 0.07$ となるように）とれば $E_i^a(a) < E_i^a(b)$ とすることができる。また，ある $x \in C(a)\backslash C(b)$，$y \in C(b)$ について $yP_i^a x$ であれば

$$E_i^a(b) \geqslant \frac{0.2}{0.2+\varepsilon}$$

$$E_i^a(a) < \frac{2\varepsilon + 0.2}{0.8-\varepsilon}$$

となるが，同様に ε を十分小さく（$\varepsilon \leqslant 0.1$ となるように）とれば $E_i^a(a) < E_i^a(b)$ とすることができる。したがって次の結果を得る。

---

[21] この定義は Ching and Zhou (近刊) による。

補助定理 4.1. ある $x \in C(a)$，$y \in C(b) \backslash C(a)$ について $yP_i^a x$，またはある $x \in C(a) \backslash C(b)$，$y \in C(b)$ について $yP_i^a x$ であれば社会的選択関数は個人 i にとって a において戦略的に操作可能である。

逆にあらゆる $x \in C(a)$，$y \in C(b) \backslash C(a)$ について，またあらゆる $x \in C(a) \backslash C(b)$，$y \in C(b)$ について $xR_i^a y$ であれば戦略的に操作可能とはならない。

誰にとってもいかなる選好の組み合わせにおいても操作可能でない場合，社会的選択関数は戦略的に操作不可能 (strategy-proof) である。

戦略的操作不可能性から次の結果を得る。

補助定理 4.2 (一般化された単調性 (generalized monotonicity)). ある選好の組み合わせ a においてある 2 つの選択肢 (x, y) について人々の選好が

(1) あるグループ V に属する人々：$xP_i^a y$

(2) あるグループ V' に属する人々：$xI_i^a y$

(3) それら以外（V'' に属する人々）：$yP_i^a x$

のようになっていて社会的選択集合に x は含まれるが y は含まれないものとする。x，y 以外の選択肢に関する選好は特定しない。また別の選好の組み合わせ b において

(1) V に属する人々：$xP_i^b y$，その他の選好は特定しない

(2) V' に属する人々：$xP_i^b y$，さもなくば選好は a とまったく同じ

(3) V'' に属する人々：特定しない

であると仮定する。そのとき社会的選択関数が戦略的に操作不可能であれば，b における社会的選択集合に y は含まれない。

証明. V に属する人々が個人 1 から m（$0 \leqslant m \leqslant n$）まで，$V'$ に属する人々は個人 $m+1$ から $m'(m \leqslant m' \leqslant n)$ まで，V'' に属する人々は個人 $m'+1$ から n までであるとする。a，b とは異なる選好の組み合わせ c を考え x，y 以外の任意の選択肢を z として，V に属する人々，および V' に属する人々の内 a と b において選好が変化する人々が $xP_i^c yP_i^c z$，V'' に属する人々が $yP_i^c xP_i^c z$ という選好を持つものとする。V' に属する人々の内 a と b において選好が変化しない人々は無視する。

個人 1 の選好が R_1^a から R_1^c に変わったときの選好の組み合わせを a^1 とし，そのとき社会的選択集合に y が含まれると仮定してみる。個人 1 は c において y より x を好んでいて選好が変化するまでは y が選ばれていなかったので，本当の選好が R_1^c であるときに R_1^a と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。次に a^1 において x が選ばれないと仮定してみる。個人 1 は c において x を最も好んでいて選好が変化するまでは x が選ばれていたので本当の選好が R_1^c であるときに R_1^a と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。したがって a^1 においても x は選ばれ y は選ばれない。同じように考えると個人 m' までの選好が R_i^a から R_i^c に変わった $a^{m'}$ においても x は選ばれ y は選ばれない。

次に $a^{m'}$ において個人 $m'+1$ の選好が $R_{m'+1}^a$ から $R_{m'+1}^c$ に変わったときの選好の組み合わせを $a^{m'+1}$ とし，そのとき y が社会的選択集合に含まれるようになったとすると a におい

て $yP^a_{m'+1}x$ であるから，個人 $m'+1$ は本当の選好が $R^a_{m'+1}$ であるときに $R^c_{m'+1}$ と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。一方 $a^{m'+1}$ において x も y も選ばれず他のある選択肢 z が選ばれるとすると，c において $yP^c_{m'+1}xP^c_{m'+1}z$ であるから，個人 $m'+1$ は本当の選好が $R^c_{m'+1}$ であるときに $R^a_{m'+1}$ と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。したがって $a^{m'+1}$ においても x は選ばれ y は選ばれない。同じように考えると結局全員の選好が R^a_i から R^c_i に変わった c においても x は選ばれ y は選ばれない。

ここで c から b に向けて 1 人づつ，その選好が R^c_i から R^b_i に変化するものとする。このとき y が選ばれず x が選ばれる状態から直接 y が選ばれる状態に変化することはない。V または V' に属するある人（個人 j とする）の選好の変化によって y が選ばれるようになったとすると b において xP^b_jy であり，その人の選好が変化するまでは x は選ばれ y は選ばれなかったから，個人 j は本当の選好が R^b_j であるときに R^c_j と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。一方 V'' に属するある人（個人 k とする）の選好の変化によって y が選ばれるようになったとすると c において $z(\neq x,y)$ について yP^c_kx であり，その人の選好が変化するまでは x は選ばれ y は選ばれなかったから，個人 k は本当の選好が R^c_k であるときに R^b_k と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。

しかし，x は選ばれ y は選ばれない状態から x，y は選ばれずに y 以外の選択肢 z が選ばれる状態に変化し，さらに y が選ばれる状態に変化するという可能性は残る。そこで何人かの選好が R^c_i から R^b_i に変わったときに x は社会的選択集合に含まれずに $z(\neq x,y)$ が社会的選択集合に含まれるようになり，さらにある個人 l の選好が R^c_l から R^b_l に変わったときに y が社会的選択集合に含まれるようになると仮定してみよう。個人 l が V に属する場合もそうでない場合も c において yP^c_lz であるから，本当の選好が R^c_l であるときに R^b_l と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性がある。したがって社会的選択関数が戦略的に操作不可能であれば y は社会的選択集合に含まれない。同じように考えると結局全員の選好が R^c_i から R^b_i に変わった b においても y は社会的選択集合に含まれない。 ☺

次に以下のような形のパレート原理を証明する。

補助定理 4.3 (パレート原理). （1）人々の選好のある組み合わせを a とする。ある 2 つの選択肢 x と y に関してすべての個人について xP^a_iy であれば，y が社会的選択集合に含まれないか，または x が含まれる（y が含まれて x が含まれないということはない)。

（2）少なくとも 1 つの選択肢の組（(x,y) とする）について，『すべての人々が xP_iy のとき x は社会的選択集合に含まれ y は含まれない』が成り立つ。

証明. （1）x が社会的選択集合に含まれるような選好の組み合わせがありそれを b とする。もし b において y が社会的選択集合に含まれないならば，b において y より x を好む人々または x と y について無差別な人々は a において y より x を好むので，補助定理 4.2によって a においても y は社会的選択集合に含まれないから証明が終わるので，y は b において社会的選択集合に含まれると仮定する。別の選好の組み合わせ c を考え，すべての人々があらゆる $z\neq x,y$ について $xP^c_iyP^c_iz$ という選好を持つものとする。個人 1 の選好が R^b_1 から R^c_1 に変わったときの選好の組み合わせを b^1 としそのとき x が社会的選択集合に含まれないとすると，それまでは x が含まれていたので個人 1 は本

当の選好が R_1^c であるときに R_1^b と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があるから b^1 においても x が含まれなければならない。同じ論理で b^1 において個人 2 の選好が R_2^b から R_2^c に変わったときにも x が含まれる。結局 c においても x が社会的選択集合に含まれなければならない。

次に人々の選好が R_i^c から R_i^a に 1 人づつ変化するとき，誰かの選好の変化によって社会的選択集合が x を含む状態から直接 y を含んで x を含まない状態に変化することはない。もしある個人 j の選好の変化によってそのようになったとすると，個人 j は a において y より x を好むので本当の選好が R_j^a であるときに R_j^c と偽ってよりよい結果を実現することができる。しかし人々の選好の変化によって社会的選択集合が x を含む状態から x と y を含まず他のある選択肢 w を含む状態を経て y を含んで x を含まない状態に変化する可能性は残る。そこである人の選好の変化によって社会的選択集合が x と y を含まず w を含む状態になり，さらに別の個人 k の選好の変化によって y を含んで x を含まない状態に変化すると仮定すると個人 k は本当の選好が R_k^c であるときに R_k^a と偽って y を実現することができる。したがって a においては x が社会的選択集合に含まれるか，あるいは y は含まれない。

(2) まず社会的選択集合がすべての選択肢を含まないような選好の組み合わせを 1 つとりそれを b とする。含まれない選択肢の 1 つを y 含まれる選択肢の 1 つを x とする。またすべての人々が x を厳密に最も好んでいるような選好の組み合わせを a とし，a において y が社会的選択集合に含まれるか，あるいは x が含まれないと仮定する。個人 1 の選好が R_1^b から R_1^a に変わったときの選好の組み合わせを b^1 としそのとき y が社会的選択集合に含まれるとすると，b においては y が選ばれておらず a において $xP_i^a y$ なので，個人 1 は本当の選好が R_1^a であるときに R_1^b と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。次に b^1 において x が社会的選択集合に含まれないとすると，b においては x が選ばれており b^1 においては x 以外のすべての選択肢 z について $xP_i^a z$ なので，個人 1 は本当の選好が R_1^a であるときに R_1^b と偽ってよりよい結果を実現することができる可能性があり戦略的に操作可能となる。したがって b^1 においても x は社会的選択集合に含まれ，y は含まれない。同じように考えると a においても x は社会的選択集合に含まれ，y は含まれない。

☺

この補助定理の (1) によれば，すべての人々が x を最も選好する場合に x が選ばれないとするとどの選択肢も選ばれないことになるので必ず x が社会的選択集合に含まれる。

4.2 『決定的』と『ほとんど決定的』

ここで前稿で用いた社会的選択関数についての『決定的』と『ほとんど決定的』の定義を確認しておこう。

ほとんど決定的 (almost decisive) あるグループ V に属するすべての人々が y より x を好み，他のすべての人々が x より y を好むときに社会的選択関数によって y が選ばれることがないならば，グループ V は y に対して x についてほとんど決定的である。

決定的 (decisive) あるグループ V に属するすべての人々が y より x を好むときに社会的選択関数によって y が選ばれることがないならば，グループ V は y に対して x について決定的である。

もしグループ V に属するすべての人々があらゆる選択肢の組について決定的であり，彼らが最も好む選択肢の集合が X であるとすると，X に含まれる選択肢以外の選択肢が社会的選択関数によって選ばれることはないので，必ず X に含まれる選択肢が選ばれる。

選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的であるようなグループを**決定的なグループ (decisive set)** と呼ぶことにする。特にグループ V が 1 人の個人からなる場合にはその個人が最も好む選択肢のいずれかが選ばれることになる。そのときその個人は独裁者である。すなわち

独裁者 独裁者とはあらゆる選択肢の組について決定的であるような個人を指す。

と表現される。

4.3 複数の選択肢を選ぶ社会的選択関数における独裁者の存在

以上の定義のもとで次の結果を示す。

補助定理 4.4 (決定的なグループに関する補助定理 (decisive set lemma)). あるグループ V がある選択肢の組 $(x,\ y)$ について，y に対して x についてほとんど決定的であればそのグループは選択肢のあらゆる組み合わせについて決定的である。

証明. グループ V が y に対して x についてほとんど決定的であるとする。x，y 以外の任意の選択肢 z をとり次のような選好の組み合わせを考える。

(1) V の人々：xP_iyP_iz

(2) 他の人々：yP_izP_ix

V が y に対して x についてほとんど決定的であるから社会的選択関数によって y が選ばれることはない。またパレート原理によって y が選ばれないのであれば z が選ばれることもない。z は任意であるから社会的選択関数は x のみを選ぶ。x と z とを比較すると V の人々は z より x を好むが他の人々は x より z を好んでいる。したがって上で示した一般化された単調性によって，V の人々の選好において xP_iz である限り社会的選択関数が z を選ぶことはないので V は z に対して x について決定的である。

次に x，y 以外の（任意に選んだ）ある選択肢を w，それら以外のすべての選択肢を z で代表させて以下のような選好の組み合わせを考える[22]。

(1) V の人々：$wP_ixP_iyP_iz$

(2) 他の人々：$yP_iwP_ixP_iz$

[22] 選択肢が 3 つしかない場合には z は存在しない。

V が y に対して x についてほとんど決定的であるから社会的選択関数によって y が選ばれることはない。またパレート原理によって y が選ばれないのならば z も選ばれない。さらにパレート原理によって x が選ばれるならば w も選ばれなければならない。したがって社会的選択関数は w のみまたは x と w を選ぶ。y と w とを比較すると V の人々は y より w を好むが他の人々は w より y を好んでいる。一般化された単調性によって V の人々の選好において wP_iy である限り社会的選択関数が y を選ぶことはないので V は y に対して w について決定的である。

以上の論理を繰り返し使うと V があらゆる選択肢の組について決定的であることが示される。 ☺

パレート原理の (2) によって少なくとも 1 つの選択肢の組 (x, y) について『すべての人々が xP_iy ならば y は社会的選択集合に含まれない』が成り立つ。したがって補助定理 4.4よりすべての人々からなる集合は決定的であり，決定的なグループが少なくとも 1 つは存在するということが言える。人々の人数は有限なので最も小さい（最も人数が少ない）決定的なグループが存在する。それは全員からなる集合かもしれないし 1 人の個人かもしれない。後者の場合その個人は独裁者である。

以上の事実と補助定理 4.4により次の定理が証明される。

定理 4.1. 社会的選択関数が戦略的に操作不可能ならば最小の決定的なグループは 1 人の個人からなる。すなわち独裁者が存在する。

証明. ある最小の決定的なグループが 2 人以上の人からなると仮定してみよう。その最小の決定的なグループを V で表す。V に含まれる 1 人の個人を個人 i とし，3 つの選択肢 x，y，w をとり，それ以外の任意の選択肢を z として以下のような選好の組み合わせを考える[23]。

（1）個人 i：$wP_ixP_iyP_iz$

（2）個人 i 以外の V の人々：$xP_iyP_iwP_iz$

（3）それ以外：$yP_iwP_ixP_iz$

V に属するすべての人々が xP_iy をいう選好を持っている。V は決定的なので y が社会的選択関数によって選ばれることはない。パレート原理によって z が選ばれることもない。もし社会的選択関数によって x のみが選ばれるとすると w より x を好むのは個人 i 以外の V の人々だけで他の人々は x より w を好むから個人 i 以外の V の人々からなるグループが決定的となってしまう。したがって w のみ，または x と w が社会的選択集合に含まれる。このとき y より w を好むのは個人 i だけで他の人々は w より y を好むから個人 i が決定的となってしまう。これらのことは V が最小の決定的なグループであるという仮定と矛盾する。したがってそもそも V は 1 人の人からなる。すなわち独裁者が存在する。 ☺

以上によって独裁者の存在が示された。

[23]選択肢が 3 つしかない場合には z は存在しない。

4.4 戦略的操作不可能性と一般化された単調性の同値性

ここで戦略的操作不可能性と一般化された単調性の同値性を示そう[24]。

定理 4.2 (戦略的操作不可能性と一般化された単調性の同値性). 一般化された単調性は戦略的操作不可能性を意味する。したがって補助定理 4.3と合わせると戦略的操作不可能性と一般化された単調性とは同値である。

証明. ある選好の組み合わせ a における社会的選択集合を $C(a)$，個人 i の選好のみが R_i^a から R_i^b に変わった選好の組み合わせ b における社会的選択集合を $C(b)$ で表す。一般化された単調性を満たすような社会的選択関数が a において戦略的に操作可能であると仮定してみよう。そうすると

(1) ある $x \in C(a)$，$y \in C(b) \backslash C(a)$ について $yP_i^a x$

(2) ある $x \in C(a) \backslash C(b)$，$y \in C(b)$ について $yP_i^a x$

のいずれかが成り立つようなケースが存在する。

まず (1) の場合を考えてみる。a と b とを比較すると a において個人 i は $yP_i^a x$ という選好を持っていて個人 i 以外の人々の選好は変わらないから，a において y より x を好む人は b においても y より x を好み，a において無差別な人の選好はまったく変わらない。a において x は社会的選択集合に含まれ y は含まれないから一般化された単調性の仮定が当てはまるので，b において y は社会的選択集合に含まれない。しかしこれは仮定と矛盾するから (1) のケースはありえない。

次に (2) の場合を考えてみる。今度は b と a とを比較すると a において個人 i は $yP_i^a x$ という選好を持っていて個人 i 以外の人々の選好は変わらないから，b において x より y を好む人は a においても x より y を好み，b において無差別な人の選好はまったく変わらないかまたは x より y を好む（個人 i が $xI_i^b y$ のとき)。また b において y が社会的選択集合に含まれ x は含まれない。したがって一般化された単調性の仮定が当てはまるので a において x は社会的選択集合に含まれない。しかしこれは仮定と矛盾するから (2) のケースもありえない。 ☺

以上によって戦略的操作不可能性と一般化された単調性が同値であることが示された。

5 異なるアプローチによる複数の選択肢を選ぶ可能性のある社会的選択関数の分析

5.1 戦略的操作不可能性の別の定義

本節では前節とは異なる，より弱い戦略的操作不可能性の定義のもとで複数の選択肢を選ぶ可能性のある社会的選択関数の問題を考えてみたい[25]。前節と同様，個人の数 n は 2 以上の整数，選択肢の数は 3 以上の整数であるとし，人々の選好には制約を加えず，また個人の選好には無差別な関係も含まれるものとする。ある選好の組み合わせ a において社会的選択関数によって選ばれる選択肢の集合を $C(a)$ で表し選択肢全体の集合を A で表す。また社会

[24] 以下の内容は Tanaka (2001) による。

[25] 本節の内容は主に Duggan and Schwartz (2000) によるが証明法は異なる。

的選択集合が人々の選好にかかわらず同一であるような場合は除外し，すべての選択肢が社会的選択関数によって選ばれる可能性があると仮定する（非賦課性)。

前節で説明した Ching and Zhou (近刊) による戦略的操作不可能性の定義においては，各個人の選好に適したある効用関数について選択肢に対するある確率の割り当てのもとで操作可能であれば戦略的操作可能性を満たさないものと定義した。これに対して Duggan and Schwartz (2000) による定義においては，各個人の選好に適したある効用関数について，選択肢にどのような確率を割り当てても操作可能となるのでなければ戦略的に操作不可能であると定義されている。詳しくは以下のようである。

戦略的操作不可能性 ある個人 i の選好だけが異なる選好の組み合わせ a，b において，それぞれ $C(a)$，$C(b)$ に属する選択肢が社会的選択関数によって選ばれる。$C(a)$，$C(b)$ に属する各選択肢に適当な正の確率を割り当て，a における個人 i の選好に適したある効用関数による $C(a)$ および $C(b)$ に含まれる選択肢から得られる期待効用をそれぞれ $E_i^a(C(a))$，$E_i^a(C(b))$ で表す。このとき各選択肢にどのような確率を割り当てても

$$E_i^a(C(b)) > E_i^a(C(a)) \tag{5.1}$$

となるならば個人 i は a において b の選好を表明した方がより大きな期待効用を実現でき社会的選択関数は戦略的に操作可能となる。

あらゆる選好の組み合わせにおいて誰にとっても戦略的に操作可能となることがないとき，社会的選択関数は戦略的に操作不可能である。

$C(b)$ に含まれる選択肢と $C(a)$ に含まれる選択肢とを比較して，ある $x \in C(b)$ とすべての $y \in C(a)$ について $xP_i^a y$ であれば，x に十分大きな効用を与える効用関数を考えることによってどのような確率分布に対しても (5.1) が成り立つようにできる。これは以下のようにして確認できる。

> b において x が実現する確率を $\varepsilon > 0$ とし，$C(a)$ の中で a において個人 i が最も好む選択肢の 1 つを w，$C(b)$ の中で最も好まない（嫌う）選択肢の 1 つを v とすると，
>
> $$E_i^a(C(b)) \geqq \varepsilon u_i^a(x) + (1-\varepsilon)u_i^a(v)$$
> $$E_i^a(C(a)) \leqq u_i^a(w)$$
>
> が得られる。$u_i^a(x) > u_i^a(w)$，$u_i^a(x) \geqq u_i^a(v)$ であるから，ε に応じて $u_i^a(x)$ に十分大きな値を与えれば $E_i^a(C(b)) > E_i^a(C(a))$ が成り立つようにできる。

また，ある $y \in C(a)$ とすべての $x \in C(b)$ について $xP_i^a y$ であれば，y に十分小さな効用を与える効用関数を考えることによってどのような確率分布に対しても (5.1) が成り立つようにできる。これは以下のようにして確認できる。

> a において y が実現する確率を $\varepsilon > 0$ とし，$C(b)$ の中で a において個人 i が最も好まない選択肢の 1 つを w，$C(a)$ の中で最も好む選択肢の 1 つを v とすると，
>
> $$E_i^a(C(b)) \geqq u_i^a(w)$$
>
> $$E_i^a(C(a)) \leqq \varepsilon u_i^a(y) + (1-\varepsilon)u_i^a(v)$$
>
> が得られる。$u_i^a(y) < u_i^a(w)$，$u_i^a(y) \leqq u_i^a(v)$ であるから，ε に応じて $u_i^a(y)$ に十分小さな値を与えれば $E_i^a(C(b)) > E_i^a(C(a))$ が成り立つようにできる。

一方，すべての $y \in C(a)$ に対して $xP_i^a y$ となるような $x \in C(b)$，あるいはすべての $x \in C(b)$ に対して $xP_i^a y$ となるような $y \in C(a)$ のいずれもが存在しなければ，ある確率分布について (5.1) が成り立たなくなる。これは以下のようにして確認できる。

> $C(b)$ の中で a において個人 i が最も好む選択肢の 1 つを x，$C(a)$ の中で最も好まない選択肢の 1 つを y とすると，$wR_i^a x$ となるような $w \in C(a)$ および $yR_i^a z$ となるような $z \in C(b)$ が少なくとも 1 つづつ存在する。b において z が実現する確率を ε_b，a において w が実現する確率を ε_a とすると
>
> $$E_i^a(C(b)) \leqq \varepsilon_b u_i^a(z) + (1-\varepsilon_b)u_i^a(x)$$
>
> $$E_i^a(C(a)) \geqq \varepsilon_a u_i^a(w) + (1-\varepsilon_a)u_i^a(y)$$
>
> が得られる。ここで $u_i^a(w) \geqq u_i^a(x)$，$u_i^a(y) \geqq u_i^a(z)$ であるから，$\varepsilon_a = 1-\varepsilon_b$ と仮定すれば $E_i^a(C(a)) \geqq E_i^a(C(b))$ となり (5.1) は満たされない。

以上の議論によって次の補助定理を得る。

補助定理 5.1. ある $x \in C(b)$ とすべての $y \in C(a)$ について $xP_i^a y$，あるいは，ある $y \in C(a)$ とすべての $x \in C(b)$ について $xP_i^a y$ であれば社会的選択関数は個人 i にとって a において戦略的に操作可能である。

逆にすべての $y \in C(a)$ に対して $xP_i^a y$ となるような $x \in C(b)$，あるいはすべての $x \in C(b)$ に対して $xP_i^a y$ となるような $y \in C(a)$ のいずれもが存在しなければ戦略的に操作可能ではない。誰にとってもいかなる選好の組み合わせにおいても操作可能でない場合，社会的選択関数は戦略的に操作不可能 (strategy-proof) である。この戦略的操作不可能性の定義の方が前節の Ching and Zhou (近刊) による定義よりも戦略的に操作可能となりにくく，したがって操作不可能となりやすいから，より弱い定義である。

5.2 修正された単調性と半決定的なグループ

戦略的操作不可能性から次の結果を得る。

補助定理 5.2 (修正された単調性 (modified monotonicity)). ある選好の組み合わせ a における社会的選択集合を $C(a)$，$C(a)$ に含まれる 1 つの選択肢を x，含まれない 1 つの選択肢を y として，人々の選好が

(1) あるグループ V に属する人々：ある $x \in C(a)$ について $xR_i^a y$

(2) それら以外（V' に属する人々）：すべての $x \in C(a)$ について $yP_i^a x$

であるとする。また別の選好の組み合わせ b において V に属する人々が次の 3 つの小グループからなるものとする（一部が空集合でもよい)。

(1) V_1：$C(a)$ を含み y を含まない共通の選択肢の集合 $X_1(C(a) \subset X_1$, $y \notin X_1)$ およびすべての $z(\notin X_1)$ について，$X_1 P_i z$（すべての $x' \in X_1$ について $x' P_i z$）

(2) V_2：X_1 を含み y を含まない共通の選択肢の集合 $X_2(X_1 \subset X_2$, $y \notin X_2)$ およびすべての $z(\notin X_2)$ について，$X_2 P_i z$（すべての $x' \in X_2$ について $x' P_i z$）

（3）V_3：a とまったく同じ選好（選好は変化しない）

b における V' の人々の選好は特定しない。そのとき社会的選択関数が戦略的に操作不可能であれば b において y は選ばれない。

証明. V に属する人々が個人 1 から m（$0 \leqslant m \leqslant n$）まで，$V'$ に属する人々は個人 $m+1$ から n までであるとする。a，b とは異なる選好の組み合わせ c において，y および $C(a)$ に含まれる選択肢以外の任意の選択肢を z として，V に属する人々が $C(a)P_i^c yP_i^c z$（すべての $x' \in C(a)$ について $x'P_i^c yP_i^c z$）という選好を，V' に属する人々が $yP_i^c C(a)P_i^c z$（すべての $x' \in C(a)$ について $yP_i^c x'P_i^c z$）という選好を持っているものとする。

個人 1 の選好が R_1^a から R_1^c に変わったときの選好の組み合わせを a^1 とし，そのとき社会的選択集合に $C(a)$ 以外の選択肢が含まれるものとする。個人 1 は c において y，z より $C(a)$ の選択肢を好んでいるので，選好の変化によって $C(a)$ 以外の選択肢が選ばれるようになるとすると本当の選好が R_1^c であるときに R_1^a と偽ってより大きな期待効用を実現することができる。したがって a^1 においてもいくつかの（すべてとは限らない）$C(a)$ の選択肢のみが選ばれなければならない。同じように考えると個人 m までの選好が R_i^a から R_i^c に変わっても（そのときの選好の組み合わせを a^m とする）いくつかの $C(a)$ の選択肢のみが選ばれる。次に a^m において個人 $m+1$ の選好が R_{m+1}^a から R_{m+1}^c に変わったときの選好の組み合わせを a^{m+1} とし，そのとき社会的選択関数によって y が選ばれるようになったとすると，a において $yP_{m+1}^a C(a)$ であるから個人 $m+1$ は本当の選好が R_{m+1}^a であるときに R_{m+1}^c と偽ってより大きな期待効用を実現することができる。一方 a^{m+1} において $C(a)$ の選択肢と y 以外のある選択肢 z が社会的選択関数によって選ばれるようになったとすると，c においてすべての $z(\notin C(a),\ z \neq y)$ に対して $C(a)P_{m+1}^c z$ であるから，個人 $m+1$ は本当の選好が R_{m+1}^c であるときに R_{m+1}^a と偽ってより大きな期待効用を実現することができる。したがって a^{m+1} においてもいくつかの $C(a)$ の選択肢のみが選ばれなければならない。同じように考えると全員の選好が R_i^a から R_i^c に変わった c においてもいくつかの $C(a)$ の選択肢のみが選ばれる。

次に c から b に向けて V_1 に含まれる人々から始まって 1 人づつその選好が R_i^c から R_i^b に変化するものとする。V_1 に含まれる最初の個人の選好が変化したときに $C(a)$ の選択肢のみが選ばれる状態から X_1 に含まれる選択肢以外の z（y も含む）が選ばれるようになったとすると，b において $X_1P_i^b z$ であり選好が変化するまでは $C(a)$ の選択肢のみが選ばれていたから，その個人は本当の選好が R_i^b であるときに R_i^c と偽ってより大きな期待効用を実現することができる可能性がある。したがって X_1 以外の選択肢は選ばれない。V_1 に含まれる 2 番目の個人の選好が変化したときにもそれまでは X_1 の選択肢のみが選ばれていたのでやはり X_1 以外の選択肢は選ばれない。同様に考えると V_1 に含まれるすべての人々の選好が変化した後においても X_1 以外の選択肢は選ばれない。次に V_2 に含まれる最初の個人の選好が変化したときに X_1 の選択肢のみが選ばれる状態から $X_2(X_1 \subset X_2)$ に含まれる選択肢以外の選択肢 z（y も含む）が選ばれるようになったとすると，b において $X_2P_i^b z$ であり選好が変化するまでは X_1 の選択肢のみが選ばれていたから，その個人は本当の選好が R_i^b であるときに R_i^c と偽ってより大きな期待効用を実現することができる。したがって X_2 の選択肢以外は選ばれない。同様のことはすべての V_2 に含まれる個人に当てはまる。続いて（V' に含まれる）個人 $m+1$ の選好が変化したときに y が選ばれるようになったとすると，c においてはすべての $z(\neq y)$ に対して $yP_{m+1}^c z$ であり，その人の選好が変化するまでは X_2 の選択肢のみが選ばれていたから，個人 $m+1$ は本当の選好が R_{m+1}^c であるときに R_{m+1}^b と偽ってより大きな期

待効用を実現することができる。同様に考えると個人 $m+2$ の選好が変化したときにも y が選ばれることはなく，全員の選好が変化した b においても y は社会的選択関数によって選ばれない。 ☺

ここで本節の意味での『半決定的』および『独裁者』の用語を定義する。

半決定的 (semi-decisive) ある選択肢の組 (x, y) をとり，あるグループ V に属する人々が次の 2 つの小グループからなっているとする（一方が空集合でもよい）。

(1) V_1：x を含み y を含まない共通の選択肢の集合 $X_1(x \in X_1,\ y \notin X_1)$ およびすべての $z(\notin X_1)$ について，$X_1 P_i z$（すべての $x' \in X_1$ について $x' P_i z$）

(2) V_2：X_1 を含み y を含まない共通の選択肢の集合 $X_2(X_1 \subset X_2,\ y \notin X_2)$ およびすべての $z(\notin X_2)$ について，$X_2 P_i z$（すべての $x' \in X_2$ について $x' P_i z$）

そのとき社会的選択関数によって y が選ばれることがないならば，グループ V は y に対して x について半決定的である。

もしグループ V に属するすべての人々があらゆる選択肢の組について半決定的であり，彼らが共通に最も好む選択肢の集合が X であるとすると，X に含まれる選択肢以外の選択肢が社会的選択関数によって選ばれることはないので，必ず X に含まれる選択肢が選ばれる。選択肢のあらゆる組み合わせについて半決定的であるようなグループを**半決定的なグループ (semi-decisive set)** と呼ぶことにする。特にグループ V が 1 人の個人からなる場合にはその個人が最も好む選択肢のいずれかが選ばれる。そのときその個人は独裁者である。すなわち

独裁者 独裁者とはあらゆる選択肢の組について半決定的であるような個人を指す。

と表現される。

さらに以下の議論において次の仮定を置く。

強い非賦課性 (strong non imposition) すべての選択肢について，それのみが社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがある。

これは『すべての選択肢について，それが社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがある。』という通常の非賦課性 (non imposition) の仮定より強い。

この仮定のもとで次の補助定理を示す。

補助定理 5.3. 社会的選択関数は戦略的に操作不可能であり，強い非賦課性を満たすとする。

(1) 人々を V とその他の 2 つのグループに分け，次のような選好の組み合わせ a を考える。

(i) V の人々：$xP_i yP_i wP_i z$

(ii) 他の人々：$yP_i wP_i xP_i z$

このとき社会的選択関数は x，y 以外の選択肢を選ばない。

(1) 同様に，人々を V とその他の 2 つのグループに分け，次のような選好の組み合わせ a を考える。

(i) V の人々：$wP_ixP_iyP_iz$

(ii) 他の人々：$yP_iwP_ixP_iz$

このとき社会的選択関数は y，w 以外の選択肢を選ばない。

証明. （1）強い非賦課性により y のみが社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがあり，それを b とする。V 以外の人々から始まって選好が 1 人づつ b から a に変化するものとすると，a において V 以外の人々はすべて y を最も好んでいるので彼らの選好の変化によっては社会的選択関数が y のみを選ぶという状況は変わらない。それに続く V の人々の選好の変化によって x が選ばれるようになることはありうるが x, y 以外の選択肢は選ばれない。

（2）強い非賦課性により w のみが社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがあり，それを b とする。V の人々から始まって選好が 1 人づつ b から a に変化するものとすると，a において V の人々はすべて w を最も好んでいるので彼らの選好の変化によっては社会的選択関数が w のみを選ぶという状況は変わらない。それに続く V 以外の人々の選好の変化によって y が選ばれるようになることはありうるが y，w 以外の選択肢は選ばれない。

☺

この補助定理を用いて次の結果を示す。

補助定理 5.4 (半決定的なグループに関する補助定理 (semi-decisive set lemma)). あるグループ V が，ある選択肢の組 $(x,\ y)$ について，y に対して x について半決定的であればそのグループは選択肢のあらゆる組み合わせについて半決定的である。

証明. x，y 以外の任意の選択肢 w をとり，それら以外の選択肢を z で表して次のような選好の組み合わせを考える。

（1）V の人々：$xP_iyP_iwP_iz$

（2）他の人々：$yP_iwP_ixP_iz$

V が y に対して x について半決定的であるから社会的選択関数によって y が選ばれることはない。また補助定理 5.3によって w も z も選ばれない。したがって社会的選択関数は x のみを選ぶ。x と w とを比較すると V の人々は w より x を好むが他の人々は x より w を好んでいる。したがって上で示した修正された単調性によって V は w に対して x について半決定的である。

同様に x，y 以外のある選択肢を w，それら以外のすべての選択肢を z で表して次のような選好の組み合わせを考える。

（1）V の人々：$wP_ixP_iyP_iz$

（2）他の人々：$yP_iwP_ixP_iz$

V が y に対して x について半決定的であるから社会的選択関数によって y が選ばれることはない。また補助定理 5.3によって x も z も選ばれない。したがって社会的選択関数は w のみを選ぶ。y と w とを比較すると V の人々は y より w を好むが他の人々は w より y を好んでいる。修正された単調性によって V は y に対して w について半決定的である。

以上の論理を繰り返し適用すると V があらゆる選択肢の組について半決定的であることが示される。 ☺

半決定的なグループについて次の結果を得る。

補助定理 5.5. 任意の 2 つの半決定的なグループに共通に含まれる人々からなるグループは半決定的なグループである。

証明. 2 つの半決定的なグループを V_1，V_2，両グループに共通に含まれる人々からなるグループを V_3 として x，y，w の 3 選択肢をとり，それら以外の任意の選択肢を z で表して次のような選好の組み合わせを考える。

（1）V_3 以外の V_1 の人々：$xP_iyP_iwP_iz$

（2）V_3 の人々：$wP_ixP_iyP_iz$

（3）V_3 以外の V_2 の人々：$yP_iwP_ixP_iz$

（4）他：$yP_ixP_iwP_iz$

V_1，V_2 は半決定的なグループであるから x，y，z は社会的選択関数によって選ばれない。したがって w のみが選ばれる。このとき y より w を好むのは V_3 の人々だけで他の人々は w より y を好んでいるから補助定理 5.2，5.4によって V_3 は半決定的なグループである。 ☺

5.3 拒否権者の存在

本節の意味での拒否権者を次のように定義する。

拒否権者 個人 i がある選択肢 x を最も好むとき，常に x が社会的選択関数によって選ばれるならば個人 i を拒否権者と呼ぶ。個人 i がある複数の選択肢を最も好む場合にはその内のいずれかが常に社会的選択関数によって選ばれるときに拒否権者と呼ぶ。

強い非賦課性と戦略的操作不可能性により次の結果を得る。

補助定理 5.6. 社会的選択関数は強い非賦課性と戦略的操作不可能性を満たし，ある選好の組み合わせ a においてすべての人々が選択肢 x を最も好んでいるものとする。このとき社会的選択関数によって選ばれるのは x のみ，すなわち $C(a) = \{x\}$ である。

証明. 強い非賦課性によって x のみが社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがありそれを b とする。人々の選好が 1 人づつ b から a に変化して行くとき x 以外の選択肢が選ばれるようになることはない。 ☺

この結果と補助定理 5.2および 5.4によりすべての人々からなるグループは半決定的なグループであるから少なくとも 1 つの半決定的なグループが存在することになり，したがって最小の半決定的なグループが存在する。共通の人々を含まない複数の半決定的なグループが存在することはありえない。

> ある半決定的なグループの全員が x を最も好むとき x 以外の選択肢は選ばれないが，別の半決定的なグループの全員が y を最も好むならば y 以外の選択肢が選ばれないことになり矛盾が生じる。

また補助定理 5.5によって最小の半決定的なグループが複数存在することもない。

> 複数の最小の半決定的なグループに共通に含まれる人々からなるグループが半決定的となるからもとのグループが最小ではありえない。

以上の議論をもとに次の定理を示す。

定理 5.1. 最小の半決定的なグループを構成する個人はそれぞれ拒否権者である。

証明. 最小の半決定的なグループが 1 人からなるならばその個人は独裁者であるから拒否権者でもある。最小の半決定的なグループが 2 人以上からなると仮定しそれを V で表して次のような選好の組み合わせを考える。z は x，w，Y 以外の任意の選択肢を表す。

(1) V に含まれる 1 人の個人 (個人 j とする)：ある選択肢の集合を Y として $YP_jxP_jwP_jz$ (すべての $y' \in Y$ について $y'P_jxP_jwP_jz$)

(2) 個人 j 以外の V の人々：$xP_jwP_jzP_jY$（すべての $y' \in Y$ について $xP_jwP_jzP_jy'$）

(3) 他：$wP_jxP_jzP_jY$（すべての $y' \in Y$ について $wP_jxP_jzP_jy'$）

V は半決定的なグループであるから社会的選択関数は w，z を選ばず x または Y に含まれる選択肢，あるいはその双方を選ぶ。もし Y に含まれるただ 1 つの選択肢 $\bar{y}$ のみが選ばれるとすると個人 j のみが x より $\bar{y}$ を好み，他の人々は $\bar{y}$ より x を好んでいるので補助定理 5.2, 5.4によって個人 j は独裁者となる。一方 x のみが選ばれるとすると個人 j 以外の人々が Y に含まれる選択肢より x を好み，個人 j は x より Y に含まれる選択肢を好むのでやはり補助定理 5.2，5.4によって個人 j 以外の人々からなるグループが半決定的なグループとなるが，そのとき補助定理 5.5によって個人 j 以外の人々からなるグループと V に共通に含まれる人々，すなわち個人 j を除く V の人々からなるグループも半決定的なグループとなり，V が最小の半決定的なグループであるという仮定と矛盾する。以上のことから Y に含まれる複数の選択肢，あるいは x と少なくとも 1 つの Y の選択肢が社会的選択関数によって選ばれなければならない。

個人 j の選好が，Y の選択肢を x，w，z より好むということを維持しながら変化すると，戦略的操作不可能性によって Y の選択肢のいずれもが選ばれなくなるということはない。個人 j の各々の選好に対応してそれ以外の人々の選好が変化したときに Y の選択肢がまったく選ばれなくなるとすると，彼らはもとの選好において Y のすべての選択肢より x，w，z を好んでいたので，選好を偽ることによってより大きな期待効用を実現できる可能性があり操作可能となる。したがって個人 j が Y の選択肢を x，w，z より好む限り社会的選択関数は少なくとも 1 つの Y の選択肢を選ぶ。以上の議論は個人 j が Y の選択肢以外の選択肢を最も好むときにも，また V に含まれる個人 j 以外の人々にも当てはまるので V に含まれる人々すべてが拒否権者である。 ☺

5.4 独裁者の存在

上で証明した補助定理 5.4，5.5だけでは前節と同様の独裁者の存在を導くことはできない。Duggan and Schwartz (2000) はこれに加えて次の仮定を置いた。

準一意性 (residual resoluteness) 1 人（個人 i とする）を除くすべての人々が同一の選好を持ち，ある選択肢 x を最も好み y を次に好んでいる。また個人 i はそれと同じ選好を持つか，または y を最も好み x を次に好んでいて，他の選択肢についての選好は他の人々と同一であるとする。そのとき社会的選択関数はただ 1 つの選択肢を選ぶ(26。

これは人々の選好に著しい共通性がある場合には 1 つの選択肢のみが選ばれるとの仮定である。人数が少ない（例えば 2 人の）場合には受け入れにくいかもしれないが人数が多ければ納得の行く仮定であろう。

ここで強い非賦課性の仮定なしに通常の非賦課性および戦略的操作不可能性，準一意性によって補助定理 5.6と同じ結果を得ることができることを示す。

補助定理 5.7. 社会的選択関数は戦略的操作不可能性と準一意性を満たすとする。ある選好の組み合わせ a において，すべての人々がある選択肢 x を最も好んでいるとき，社会的選択関数によって選ばれるのは x のみ，すなわち $C(a) = \{x\}$ である。

証明. ある選好の組み合わせ b においてすべての人々の選好が同一であり，かつ選択肢 x を最も好んでいるものとする。準一意性によって b において社会的選択関数によって選ばれる選択肢はただ 1 つでなければならない。非賦課性により x が社会的選択関数によって選ばれるような選好の組み合わせがあり，それを c とする。個人 1 の選好のみが R_1^c から R_1^b に変化したときの選好の組み合わせを c^1 とし，c^1 において x が社会的選択関数によって選ばれなくなったとしよう。個人 1 は R_1^b において x を最も好み，それが c において選ばれているので本当の選好が R_1^b であるときに R_1^c と偽ってより大きな期待効用を実現でき操作可能となってしまう。したがって c^1 においても x が選ばれなければならない。同様の論理ですべての人々の選好が R_i^b に変化したときにも x が選ばれなければならないが，準一意性により b においてはただ 1 つの選択肢が選ばれるので x のみが選ばれることになる。

次に個人 1 の選好が R_1^b から R_1^a に変化したときに x 以外の選択肢が選ばれるものとすると，個人 1 は R_1^a においても x を最も好むのでどのような確率分布においても自分の選好を R_1^b と偽った方がより大きな期待効用を実現できることになり操作可能となる。したがって x のみが社会的選択関数によって選ばれる。同様の論理によってすべての人々の選好が R_i^b から R_i^a に変化した a においても x のみが選ばれる。 ☺

この結果は，どの選択肢についても全員がそれを最も好んでいるときにはそれのみが社会的選択関数によって選ばれることを意味するから，戦略的操作不可能性の仮定のもとで『準一意性』は『強い非賦課性』を意味することがわかる。

ここで，ある選択肢の組 (x, y) についてすべての $z(\neq x, y)$ に対して個人 1 のみが xP_1yP_1z，他の $n-1$ 人の人々が yP_ixP_iz という選好を持ち，x，y 以外の選択肢に関する選好は全員同じであるような場合を考えてみる。戦略的操作不可能性により社会的選択関数は x，y 以外の選択肢を選ばない。さらに準一意性によってそのときに選ばれる選択肢は x のみであるか，あるいは y のみである。前者の場合補助定理 5.2，5.4によって個人 1 が独裁者となる。独裁

(26適当な訳語がないので『準一意性』と呼ぶことにする。

者がいないとすると y のみが選ばれなければならないが，その場合個人 1 を除く $n-1$ 人の人々からなるグループがやはり補助定理 5.2，5.4によって半決定的なグループとなる。同様にしてある 1 人の個人を除く $n-1$ 人のグループすべてが半決定的なグループであることが示される。この事実と補助定理 5.5によって次の結論を得る。

定理 5.2. 戦略的に操作不可能で準一意性を満たす社会的選択関数には独裁者が存在する。

証明. 補助定理 5.5により個人 1 を除く $n-1$ 人のグループと個人 2 を除く $n-1$ 人のグループに共通に含まれる人々からなるグループは半決定的なグループであるが，それは個人 1 と 2 を除く $n-2$ 人からなるグループである。そのグループと個人 3 を除く $n-1$ 人のグループに共通に含まれる人々からなるグループも半決定的なグループになるが，それは個人 1，2，3 を除く $n-3$ 人からなるグループである。同様の議論を繰り返すと最後は個人 n だけからなるグループが半決定的なグループとなり独裁者が存在することになる[27]。 ☺

以上によって独裁者の存在が示された。

5.5 戦略的操作不可能性と修正された単調性の同値性

ここで戦略的操作不可能性と修正された単調性の同値性を示そう。

定理 5.3 (戦略的操作不可能性と修正された単調性の同値性). 修正化された単調性は戦略的操作不可能性を意味する。したがって補助定理 5.2と合わせると戦略的操作不可能性と一般化された単調性とは同値である。

証明. ある選好の組み合わせ a における社会的選択集合を $C(a)$，個人 i の選好のみが R_i^a から R_i^b に変わった選好の組み合わせ b における社会的選択集合を $C(b)$ で表す。修正された単調性を満たすような社会的選択関数が a において戦略的に操作可能であると仮定してみよう。そうすると

(1) ある $x \in C(a)$ とすべての $y \in C(b)$ について $yP_i^a x$ $(C(b)P_i^a x)$

(2) ある $y \in C(b)$ とすべての $x \in C(a)$ について $yP_i^a x$ $(yP_i^a C(a))$

のいずれかが成り立つようなケースが存在する。

まず (1) の場合を考えてみる。仮定により $x \notin C(b)$ である。b と a とを比較すると b においてある y について $yR_i^b x$ である人々の選好は a において $yP_i^a x$ であるか（個人 i が $yR_i^b x$ の場合）または変化しない。個人 i はすべての $y \in C(b)$ について $yP_i^a x$ であるから $C(b)$ を含むある選択肢の集合 Y について $YP_i^a x$ である。したがって修正された単調性によって x は a における社会的選択集合に含まれてはならないが，これは仮定と矛盾する。

次に (2) の場合を考えてみる。仮定により $y \notin C(a)$ である。今度は a と b とを比較すると，個人 i は $yP_i^a x$ であるから a においてある x について $xR_i^a y$ である人々の選好は変化しない。したがってやはり修正された単調性によって y は b における社会的選択集合に含まれてはならない。しかしこれも仮定と矛盾するから (2) のケースもありえない。 ☺

以上によって戦略的操作不可能性と修正された単調性が同値であることが示された。

[27] 共通部分をとる順番を変えると他の個人を独裁者とすることができる。

5.6 選ばれる選択肢に等しい確率を割り当てる場合

Feldman (1980) は複数の選択肢を選ぶような社会的選択関数について，人々が選ばれる選択肢にそれぞれ等しい確率（例えば 4 つの選択肢が選ばれる場合にはそれぞれに $\frac{1}{4}$ の確率を与える）を割り当てるような場合について分析し戦略的に操作不可能な社会的選択関数には独裁者または『2 人による独裁 (bi-dictatorship[28])』が存在することを示した。その証明は次節で取り扱う確率的な社会的選択関数を用いても可能であるが，ここでは本節での議論の応用として示す。

本節での Duggan and Schwartz (2000) による戦略的操作不可能性の定義においては，社会的選択関数によって選ばれる複数の選択肢にどのような確率を割り当てても操作可能となるのでなければ操作不可能性に反しないとされるが，Feldman (1980) の定義では等しい確率という特定の確率の割り当てについて操作可能であれば操作不可能性を満たさないと見なされる。したがって Duggan and Schwartz (2000) の意味で操作可能であれば Feldman (1980) の意味でも操作可能となる。逆に後者の意味で操作不可能ならば前者の意味でも操作不可能である。一方 Ching and Zhou (近刊) による前節での操作不可能性の定義においては，等しい確率とは限らないある確率の割り当てのもとで操作可能であれば操作不可能性を満たさないものと定義されていたから，Ching and Zhou (近刊) の意味で操作不可能であれば Feldman (1980) の意味でも操作不可能となり，Feldman (1980) の定義は中間的なものであることがわかる。

等しい確率を割り当てる場合に操作不可能ならば Duggan and Schwartz (2000) の意味でも操作不可能であるから先に証明した補助定理 5.2，5.4，5.5，5.6および定理 5.1がこの場合にも成り立つので最小の半決定的なグループが存在し，かつそのグループに属する個人それぞれが拒否権者である。さらに最小の半決定的なグループが 2 人以下（1 人または 2 人）の個人によって構成され，かつその 2 人が最も好む選択肢以外は選ばれないことが示されれば，独裁者または『2 人による独裁』が存在することが証明される。ただし次の仮定を必要とする。

仮定 5.1. 社会的選択関数は各個人が最も好む選択肢の集合から多くとも一つの選択肢しか選ばない。

この仮定のもとで次の定理が得られる。

定理 5.4. 人々が戦略的に操作不可能な社会的選択関数によって選ばれる選択肢に等しい確率を割り当てる場合には，独裁者または『2 人による独裁』が存在する。

証明. (1) まず最小の半決定的なグループが 2 人以下の個人によって構成されることを示す。1 人の人 (個人 1 とする) を除くすべての人々が，すべての $z(\neq x, y)$ について xP_iyP_iz，個人 1 のみが yP_1xP_1z という選好を持つときに y のみが選ばれるような社会的選択関数を考えると個人 1 は独裁者となる。したがって独裁者が存在することはありうる。以下では独裁者がいないものして議論を進める。最小の決定的なグループが 3 人以上からなると仮定してそのグループを V で表し，x，y，w の 3 選択肢をとり，他の任意の選択肢を z で表して次のような選好の組み合わせ a を考える。

(i) V に属する個人（個人 1 とする）：$xP_1yP_1wP_1z$

(ii) V に属する別の個人（個人 2 とする）：$xP_2yP_2wP_2z$

(28 『複裁』とでも呼ぶべきかもしれない。

(iii) V に属する他の人々：$wP_ixP_iyP_iz$

(iv) 他：$wP_ixP_iyP_iz$

V は決定的なグループであるから y，z は社会的選択関数によって選ばれない。一方 V の人々はそれぞれが拒否権者であるから社会的選択関数は x と w の 2 つを選ばなければならない。ここで個人 2 が上記の真の選好ではなく $yP_2xP_2wP_2z$ という選好を表明したとする。そのとき個人 2 は拒否権者であるから社会的選択関数は x，y，w の 3 つの選択肢を選ぶ。a における個人 2 の効用関数として

$$\frac{u_2(x)+u_2(y)+u_2(w)}{3} > \frac{u_2(x)+u_2(w)}{2}$$

すなわち

$$u_2(y) > \frac{u_2(x)+u_2(w)}{2}$$

満たすようなものを考えると各選択肢に等しい確率を割り当てる場合社会的選択関数は個人 2 にとって操作可能となる。以上によって戦略的に操作不可能な社会的選択関数について最小の決定的なグループが 3 人以上の個人を含まないことが示された。

V が 2 人の個人からなる場合には上記の (i) または (iii) にあたる個人が存在せず，(i) に当たる個人がいないときには個人 2 が $yP_2xP_2wP_2z$ という選好を表明すると x が選ばれなくなって期待効用は下がってしまい，(iii) にあたる個人がいないときにはもともと x のみが選ばれていたのでやはり期待効用を大きくすることはできない。

(2) 次に最小の半決定的なグループが 2 人からなる場合にその 2 人が最も好む選択肢以外の選択肢が選ばれないことを示す。そのグループが個人 1 と個人 2 からなるものとし，その 2 人が異なる選択肢を最も好むケースとして次のような選好の組み合わせ a を考える。

(i) 個人 1：$xP_1yP_1wP_1z$

(ii) 個人 2：$wP_2xP_2yP_2z$

(iii) 他：$yP_ixP_iwP_iz$

個人 1，2 は拒否権者であるから x と w は社会的選択関数によって選ばれるが，一方この 2 人からなるグループは半決定的なグループであるから y も z も選ばれない。したがって x，w のみが選ばれる。このことは個人 1，2 以外の人々の選好が変化しても変わらない。個人 1，2 以外の人々のある選好の組み合わせのもとにおいて，個人 1 の選好が x を最も好むということを維持しながら変化しても半決定性により x，w 以外の選択肢は選ばれない。一方，個人 2 の選好が w を最も好むということを維持しながら変化した場合には 2 人が拒否権者であることによって x と w は選ばれ続けるが，その他にいくつかの選択肢が選ばれると仮定してみよう。x，w 以外に m 個の選択肢が選ばれるものとし，その内で個人 2 が選好が変化した後に最も好むものを z で表す。選好が変化した後の個人 2 の効用関数を u_2 とすると，w を最も好むから $u_2(z) < u_2(w)$ が成り立つ。そのとき

$$\frac{u_2(x)+mu_2(z)+u_2(w)}{m+2} < \frac{u_2(x)+u_2(w)}{2} \tag{5.2}$$

すなわち

$$u_2(z) < \frac{u_2(x) + u_2(w)}{2} \tag{5.3}$$

となるように u_2 を選べば個人 2 が選好が変化した後に a の選好を表明することによってより大きな期待効用を実現できることになり操作可能となる。しがたって個人 2 の選好の変化によっても x，w 以外の選択肢は選ばれない。

同様の議論は個人 1，2 が共通の選択肢を最も好む場合にも，また x および w が複数の選択肢からなる場合にも当てはまる。x が x_1，x_2 など複数の選択肢からなる場合を考えてみよう。個人 2 の選好が変化する前に x_1 が，変化後に x_2 が選ばれる可能性がある（仮定 5.1によって x_1，x_2 の両方が選ばれることはない）。そのとき (5.2) は

$$\frac{u_2(x_2) + mu_2(z) + u_2(w)}{m+2} < \frac{u_2(x_1) + u_2(w)}{2}$$

となり，(5.3) は

$$u_2(z) < \frac{(m+2)u_2(x_1) - 2u_2(x_2) + mu_2(w)}{2m} \tag{5.4}$$

となるが，$u_2(z) < u_2(w)$ であるから (5.4) が成り立つように u_2 を選ぶことができる。w も w_1，w_2 などの複数の選択肢からなり，個人 2 の選好の変化前に w_1 が，変化後に w_2 が選ばれる場合 (5.4) は

$$u_2(z) < \frac{(m+2)u_2(x_1) - 2u_2(x_2) + (m+2)u_2(w_1) - 2u_2(w_2)}{2m} \tag{5.5}$$

となるが $u_2(z) < u_2(w_1) = u_2(w_2)$ であるから (5.5) が成り立つように u_2 を選ぶことができる。

個人 1，2 がある共通の選択肢 x を最も好む場合には半決定性によって個人 1，2 のいずれかが最も好む選択肢以外の選択肢（2 人ともにそれらの選択肢よりも x を好む）は選ばれない。

☺

6　確率的な社会的選択関数についてのギバードの定理

6.1　決定方法 (decision scheme) とその戦略的操作不可能性

ギバード・サタースウェイトの定理において想定した社会的選択関数は，複数の選択肢の中から何らかの方法によって 1 つの選択肢を選ぶものであった。ここでは確率的な方法で選択肢を選ぶ，正確に言えば複数の選択肢それぞれに確率を割り当てるというような選び方に基づく社会的選択関数について考えてみたい[29]。以下の議論では人々の選好を無差別な選択肢がない場合（線形の選好）に限定する。したがって各自の選好においてすべての選択肢に序列をつけることができる。確率的な結果についての人々の評価を，複数の選択肢を選ぶ社会的選択関数について分析したときと同様にフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型の効用

[29] 以下の内容は Gibbard (1977) による。

関数で表す。また，これまでどおり人々の数は 2 以上，選択肢の数は 3 以上の有限な整数である。

まず確率的な社会的選択関数を定義する。

確率的社会的選択関数あるいは決定方法 (decision scheme) 人々の選好に応じて各選択肢に確率を割り当てる仕組みであり，選好の組み合わせ a において選択肢 x に割り当てられる確率を $p(x,a)$ で表す。各選択肢に割り当てられる確率の組み合わせ（ベクトル）を $d(a)$ で表し，これを確率的社会的選択関数あるいは決定方法と呼ぶ[30]。すべての選択肢に割り当てられる確率の和は 1 である。すなわち

$$\sum_{j=1}^{m} p(x_j, a) = 1$$

この式では m 個の選択肢の代表を x_j で表している。

選好の組み合わせ a においてある確率が各選択肢に割り当てられたときの個人 i の効用の期待値（期待効用）を個人 i の選好に適した効用関数 $u_i^a(x_j)$ を用いて

$$E_i^a(d(a)) = \sum_{j=1}^{m} u_i^a(x_j)p(x_j, a)$$

と表す。

次に決定方法についての戦略的操作不可能性を定義する。

戦略的操作不可能性 選好の組み合わせ a において，ある 1 人の個人 i の選好が P_i^a から P_i^b に変わったときに[31]，決定方法が（正確には決定方法の値が）$d(a)$ から $d(b)$ に変わったとする。そのとき P_i^a に適したある効用関数によって

$$E_i^a(d(b)) > E_i^a(d(a))$$

であるならば決定方法は戦略的に操作可能である。E_i^a は選好が P_i^a のときの個人 i の期待効用である。この式は個人 i が，本当の選好が P_i^a であるときにそれとは異なる P_i^b に基づいて意志表明することによって P_i^a に適した効用関数で見てよりよい結果を実現できることを意味する。

どの個人にとっても，またいかなる選好の組み合わせにおいても，さらに各自の選好に適したどのような効用関数を用いても決定方法が戦略的に操作可能でないならば，その決定方法は**戦略的に操作不可能 (strategy-proof)** であると言う。

さらに決定方法に関するいくつかの用語と記号を定義する。

隣り合った選択肢 ($xP_i!y$) ある 2 つの選択肢 x，y が，ある個人 i の選好において xP_iy を満たし，かつその個人の選好の順序において隣り合っている（xP_izP_iy となるような z がない）場合に $xP_i!y$ と表す。

---

[30] 今後これを主に『決定方法』と呼ぶ。

[31] 個人の選好において無差別な関係を排除しているので個人 i の選好を P_i^a で表す。

二項反応的 (pairwise responsive) 2つの選択肢 x，y がある個人 i の選好において $xP_i!y$ という関係にあるものとする。そのときに決定方法によって x，y 以外の選択肢 z に割り当てられる確率を $p(z,a)$，個人 i の選好が $yP_i!x$ に変化したときに z に割り当てられる確率を $p(z,b)$ とすると $p(z,b)=p(z,a)$ であるならば，決定方法は二項反応的である（あるいは二項反応性 (pairwise responsiveness) を満たす）と言う。

隣り合った x と y の選好順序が入れ替わっても x，y 以外の選択肢 z に割り当てられる確率は影響を受けないということである。したがって x と y に割り当てられる確率の和も変わらない。

決定方法が素直 (non perverse) であること 2つの選択肢 x，y が，ある個人 i の選好において $xP_i!y$ という関係にあるものとする。そのときに決定方法によって y に割り当てられる確率を $p(y,a)$，個人 i の選好が $yP_i!x$ に変化したときに y に割り当てられる確率を $p(y,b)$ とすると $p(y,b) \geqq p(y,a)$ であるならば，決定方法は素直 (non perverse) であると言う。

ある個人の選好において2つの隣り合う選択肢の順序が逆転したときに，上に上がった方の選択肢に割り当てられる確率が小さくはならないということである。

決定方法が素直でかつ二項反応的であれば個人 i の選好が $xP_i!y$ から $yP_i!x$ に変化したときに x に割り当てられる確率は大きくはならない（$p(x,b) \leqq p(x,a)$）。

局所的 (localized) いくつかの選択肢の集合を X としそれ以外の選択肢の集合を Y とする。X に属する各選択肢 x と Y に属する各選択肢 y についてある個人 i について xP_iy が成り立つ（X に属する選択肢が個人 i の選好の上位を占めている）ときに，決定方法によって X の選択肢に割り当てられる確率の合計を $p(X,a)$ で表す。X の選択肢の間，あるいは Y の選択肢の間で個人 i の選好が変化しても $p(X,a)$ の値が変わらないとき，決定方法は局所的であると言う。

これはある個人の選好において X 内あるいは Y 内で選択肢の順序が変わり一部の選択肢に割り当てられる確率が増え，他の一部の選択肢に割り当てられる確率が減っても X，Y それぞれに含まれる選択肢に割り当てられる確率の和が変わらないという性質である。

またここでは次のような意味でのパレート原理を仮定する。

事後的 (ex post) なパレート原理 ある選好の組み合わせにおいてすべての人々が xP_iy であるならば，決定方法によって y に割り当てられる確率は0である。

ある1人の人が最も好む選択肢に確率1が割り当てられる場合には決定方法は独裁的 (dictatorial) であると言う。さらに『確率的に独裁的』を次のように定義する。

確率的に独裁的 (randomly dictatorial) 決定方法によって各選択肢に割り当てられる確率がいくつかの独裁的な決定方法を確率的に組み合わせた形になっているとき，その決定方法は確率的に独裁的 (randomly dictatorial) であると言う。

詳しく言えば決定方法が確率的に独裁的であるとは次のような意味である。

(1) 各個人が最も好む選択肢にのみ正の確率が割り当てられ，その値は誰がその選択肢を好むかによってのみ決まり，その選択肢が何であるかには依存しない。また各選択肢を最も好む人々の構成が変わらない限り，その他の部分で人々の選好が変わってもその選択肢に割り当てられる確率は変わらない。

(2) その確率は決定方法における各個人の比重 (weight) を表すものと考えられ，複数の人々が同じ選択肢を最も好むときにはそれらの人々の比重の合計がその選択肢に割り当てられる。

(3) 誰か 1 人の比重が 1 であれば独裁的であるが，確率的に独裁的な場合は各個人に 1 以下の比重が与えられる。ただし全員の比重が正であるとは限らない。

6.2 戦略的に操作不可能な決定方法の性質

まず次の補助定理を示す。

補助定理 6.1. 決定方法が局所的ならば二項反応的である。

証明. 2 つの選択肢 x，y について，ある個人 i について $xP_i!y$ であるとする。x，y 以外のある選択肢 z をとり個人 i が z よりも好む選択肢の集合を W で表す。また W に z を合わせた集合を W' で表す。x，y は隣り合っているのでともに W および W' に属するか，ともに属さないかのいずれかである。個人 i の選好が $xP_i!y$ から $yP_i!x$ に変わったとしても，決定方法が局所的であるから W および W' に割り当てられる確率は変わらない。したがって z に割り当てられる確率も変わらないので決定方法は二項反応的である。 ☺

『戦略的操作不可能性』から次の結果が得られる。

補助定理 6.2 (決定方法が素直，局所的かつ二項反応的であること). 決定方法が戦略的に操作不可能であれば，局所的，二項反応的かつ素直である。

証明. (1) まず局所的でないと仮定してみよう。ある個人 i の選好の上位に位置する選択肢の集合を X とし，選好の組み合わせ a，b において X の選択肢に割り当てられる確率の合計を $p(X,a)$ および $p(X,b)$ で表す（a，b いずれにおいても X は個人 i の選好の上位にある)。もし局所的でなければ，選好の組み合わせが a から b に変わるような形で個人 i の選好が変化し，X を構成する選択肢に変化がないときに $p(X,b)$ と $p(X,a)$ とが異なることがある。$p(X,b)-p(X,a)=\varepsilon>0(0<\varepsilon<1)$ とし，個人 i の a における選好に適した効用関数を u_i^a として，X に属する選択肢 x について $1\leqq u_i^a(x)<1+\varepsilon$，$X$ に属さない選択肢 y について $0\leqq u_i^a(y)<\varepsilon$ となるようなものを考える。すると a，b における期待効用はそれぞれ次のようになる。

$$E_i^a(d(a))<(1+\varepsilon)p(X,a)+\varepsilon[1-p(X,a)]=p(X,a)+\varepsilon$$

$$E_i^a(d(b))\geqq 1\cdot p(X,b)+0\cdot[1-p(X,b)]=p(X,b)=p(X,a)+\varepsilon$$

したがって $E_i^a(d(b))>E_i^a(d(a))$ が得られる。$E_i^a(d(b))$，$E_i^a(d(a))$ は a における選好に適した効用関数による期待効用である。このことは選好の組合わせ a において個人 i が b における選好に基づいて意志表明することによってより高い期待効用を実現できる

ことを意味するから，決定方法は戦略的に操作可能である。$p(X,b)-p(X,a)<0$ の場合には，以下のように b における個人 i の選好に適した効用関数を考えることによってやはり戦略的に操作可能であることが示される。

$$p(X,a)-p(X,b)=\varepsilon>0,\ 1\leqq u_i^b(x)<1+\varepsilon,\ 0\leqq u_i^b(y)<\varepsilon \text{ とすると}$$

$$E_i^b(d(a))\geqq 1\cdot p(X,a)+0\cdot[1-p(X,a)]=p(X,a)=p(X,b)+\varepsilon$$

$$E_i^b(d(b))<(1+\varepsilon)p(X,b)+\varepsilon[1-p(X,b)]=p(X,b)+\varepsilon$$

より $E_i^b(d(a))>E_i^b(d(b))$ を得る。

よって $p(X,b)-p(X,a)=0$ でなければならないから局所的である。

(2) 補助定理 6.1により局所的であれば二項反応的である。

(3) 次に局所的であるが素直ではないと仮定してみよう。そうするとある個人 i とその選好において隣り合う 2 つの選択肢 x，y（$xP_i!y$）について，$xP_i!y$ が $yP_i!x$ に変わったとき（このとき選好の組み合わせが a から b に変わったと表現する）に y に割り当てられる確率が小さくなるような場合がある。そのとき二項反応性によって x，y 以外の確率は変わらないから x に割り当てられる確率は大きくなる。それぞれの確率の変化を ε で表し，$xP_i!y$ のときの個人 i の選好に適した効用関数 u_i^a をとると

$$E_i^a(d(b))-E_i^a(d(a))=\varepsilon u_i^a(x)-\varepsilon u_i^a(y)>0$$

となるが，これは個人 i にとって選好の組合わせ a において戦略的に操作可能であることを意味するから決定方法は素直でなければならない。

☺

次に定理の証明にとって重要な以下の結果を示す。

補助定理 6.3. 決定方法が事後的なパレート原理を満たし戦略的に操作不可能ならば，ある個人が最も好む選択肢以外の隣り合った 2 つの選択肢のその個人の選好における順序が入れ替わったとき，それらの選択肢に割り当てられる確率は変化しない。

証明. ある選好の組み合わせ a において個人 1 が最も好む選択肢以外の 2 つの選択肢 x，y が個人 1 の選好において隣り合っている（$xP_1^a!y$）ものとする。個人 1 の選好において x と y の順序が入れ替わったときの選好の組み合わせを b とし，a，b において x，y に割り当てられる確率を $p(x,a)$，$p(y,b)$ などで表すと，二項反応性によって

$$p(y,b)-p(y,a)=p(x,a)-p(x,b)=\varepsilon \tag{6.1}$$

を得る。以下では $\varepsilon=0$ を示す。

a において個人 1 が最も好む選択肢を z とする。仮定により z は x，y とは異なる。すべての人々が z を最も好んでいる場合には事後的なパレート原理によって z 以外の選択肢の確率は 0 となり，z に確率 1 が割り当てられるから x と y の順序が入れ替わっても x，y の確率は 0 のままで変わらず $\varepsilon=0$ である。z 以外の選択肢を最も好む人がいると仮定し，その 1 人を個人 2 とする。ここで個人 2 の選好において z と z より 1 つ上に位置する選択肢 w_1 との順

序が入れ替わったときの選好の組み合わせを a_{21} とし，b において z と w_1 の個人 2 の選好における順序が入れ替わったときの選好の組み合わせを b_{21} とすると，w_1 が x，y とは異なる選択肢であれば二項反応性によって a と a_{21} における x，y の確率，および b と b_{21} における x，y の確率は等しい。したがって

$$p(y,b_{21})-p(y,a_{21})=p(x,a_{21})-p(x,b_{21})=p(y,b)-p(y,a)=p(x,a)-p(x,b)=\varepsilon \quad (6.2)$$

を得る。

次に w_1 が y と同一の選択肢である場合を考えてみよう。まず二項反応性により a と b における z の確率は等しく，a_{21} と b_{21} における z の確率も等しい。a と a_{21} を比較して

$$p(z,a_{21})-p(z,a)=p(y,a)-p(y,a_{21})$$

を，b と b_{21} を比較して

$$p(z,a_{21})-p(z,a)=p(y,b)-p(y,b_{21})$$

を得る。ここで $p(z,b_{21})=p(z,a_{21})$，$p(z,b)=p(z,a)$ を用いた。この 2 式より

$$p(y,a)-p(y,a_{21})=p(y,b)-p(y,b_{21})$$

すなわち

$$p(y,b)-p(y,a)=p(y,b_{21})-p(y,a_{21}) \quad (6.3)$$

が得られる。a_{21} と b_{21} を比較すると二項反応性より

$$p(y,b_{21})-p(y,a_{21})=p(x,a_{21})-p(x,b_{21})=\varepsilon_{21}$$

を得るが，(6.1)，(6.3) より $\varepsilon_{21}=\varepsilon$ であることがわかる。w_1 が x と同一の選択肢である場合も同様にして

$$p(y,b_{21})-p(y,a_{21})=p(x,a_{21})-p(x,b_{21})=\varepsilon$$

を示すことができる[32]。

以上のことは個人 1 の選好における x と y との順序の入れ替えによる y，z の確率の変化（ε の値）が個人 2 の選好における z と w_1 との順序の入れ替えによって影響を受けないことを意味する。

同じように考えれば個人 2 の選好において z がさらに 1 つ上の選択肢 w_2 と入れ替わった場合にも ε の値は変わらず，z が個人 2 の選好の最上位になるまで移動しても同じことが言える。同様に個人 2 以外の最も好む選択肢が z ではない人についてもまったく同じ議論が当てはまるので，結局 z が全員の選好において最上位になってても ε の値は変わらない。z が全員の選好において最上位にある場合には事後的なパレート原理により z に割り当てられる確率は 1 であるから，すべての場合についてが $\varepsilon=0$ となり補助定理の結論が示された。 ☺

[32] (6.3) に代えて

$$p(x,b)-p(x,a)=p(x,b_{21})-p(x,a_{21})$$

が得られる

6.3　決定方法についてのギバードの定理

以上の準備のもとに次の定理を示す。

定理 6.1. 事後的なパレート原理を満たし，戦略的に操作不可能な決定方法は確率的に独裁的である。

いくつかの補助定理によってこの定理が証明される。まず次の結果を示す。

補助定理 6.4. 決定方法は事後的なパレート原理を満たし戦略的に操作不可能であるとする。あるグループ V に属する人々が選択肢 x を最も好み，他の人々が x を最も嫌っている（x が彼らの選好において最下位にある）ときに（そのような選好の組み合わせを a とする）x に割り当てられる確率 $p(x,a)$ を $p_V(x,a)$ で表すと

（1）$p_N(x,a)=1$ である。ただし N はすべての人々の集合を表す。

（2）$p_V(x,a)$ は人々の x 以外の選択肢に関する選好には依存しない。

（3）V に属する人々が選択肢 z を最も好み，他の人々が z を最も嫌っている（z が彼らの選好において最下位にある）ときに（そのような選好の組み合わせを b とする）z に割り当てられる確率 $p(z,b)$ を $p_V(z,b)$ で表すと $p_V(z,b)=p_V(x,a)$ である。

証明.　（1）事後的なパレート原理から x 以外の選択肢に割り当てられる確率はすべて 0 であるから x の確率は 1 である。

（2）決定方法の局所性により V の人々の x 以外の選択肢に関する選好の変化は x に割り当てられる確率に影響しない。x は V 以外の人々の選好において最下位にあるので，やはり局所性によって V 以外の人々の x 以外の選択肢に関する選好の変化も x に割り当てられる確率に影響しない。

（3）選好の組み合わせ a において，V に属する人々が x を最も好むとともに $xP_i!z$ という選好を持ち，他の人々が x を最も嫌うともに $zP_i!x$ という選好を持っていると仮定する。このとき x に割り当てられる確率は $p_V(x,a)$ に等しく，パレート原理と補助定理 6.3によって z に割り当てられる確率は 0 である。次に別の選好の組み合わせ b をとり，V に属する人々が z を最も好むとともに $zP_i!x$ という選好を持ち，他の人々が z を最も嫌うとともに $xP_i!z$ という選好を持っていると仮定する。このとき z に割り当てられる確率は $p_V(z,b)$ に等しく，パレート原理と補助定理 6.3によって x に割り当てられる確率は 0 である。a と b においては各個人の選好において隣り合う x と z に関する選好が変化しただけであるから二項反応性により x と z 以外の選択肢に割り当てられる確率は変化せず，x と z に割り当てられる確率の和も変化しない，したがって $p_V(x,a)=p_V(z,b)$ が得られる。

☺

ここで定義した $p_V(x,a)$ の値はグループ V の人々がある共通の選択肢を最も好み，V 以外の人々がその選択肢を最も嫌うということを除いて特定の選択肢や人々の選好には依存せず，

どのような人々が V を構成するかによってのみ決まるから，この値はグループ V に与えられる比重と見なすことができる。これを

$$\mu(V) = p_V(x, a) \tag{6.4}$$

と表す。また V が 1 人の人からなる場合には $\mu(V)$ はその人の個人としての比重を表す。

選好の組み合わせ a において x を最も好む人々の集合を $V(x, a)$ で表し，そのグループの比重を $\mu(V(x, a))$ で表す。補助定理 6.3を用いて次の補助定理を示す。

補助定理 6.5. 決定方法が事後的なパレート原理を満たし戦略的に操作不可能であるとすると，その決定方法によって選好の組み合わせ a において x に割り当てられる確率 $p(x, a)$ は次の式を満たす。

$$p(x, a) = \mu(V(x, a)) \tag{6.5}$$

証明. まず V の人々が x を最も好み，他の人々が x を最も嫌っているときには $\mu(V(x, a)$ の定義によって $p(x, a) = \mu(V(x, a))$ が成り立つ。補助定理 6.4によりその値は V および V 以外の人々の x 以外の選択肢に関する選好には依存しない。一方，補助定理 6.3により V 以外の人々の選好において x と他の選択肢との順序が入れ替わっても x が最上位に行かない限り x に割り当てられる確率は変化しない。したがって一般的に $p(x, a) = \mu(V(x, a))$ が成り立つ。 ☺

次に以下の補助定理を示す。

補助定理 6.6. 人々の集合 V_1 と V_2 があり共通の人々を含まないものとする ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$)。決定方法が事後的なパレート原理を満たし戦略的に操作不可能であれば $V = V_1 \cup V_2$ について $\mu(V) = \mu(V_1) + \mu(V_2)$ である。

証明. V_1 の人々が x を最も好み，V_2 の人々は x とは異なる y を最も好むとともに x をその次に好んでいる。またそれ以外 $(N - V_1 \cup V_2)$ の人々は x，y 以外の選択肢を最も好み，かつ y より x を好んでいるものと仮定し，そのような選好の組み合わせを a とする。このとき補助定理 6.5によって x，y に割り当てられる確率はそれぞれ V_1，V_2 の比重 $\mu(V_1)$，$\mu(V_2)$ に等しい。

ここで V_2 の人々の選好において x と y の順序が入れ替わったときの選好の組み合わせを b とすると，やはり補助定理 6.5によってそのとき x に割り当てられる確率は $V_1 \cup V_2$ の比重 $\mu(V_1 \cup V_2)$ に等しい。また二項反応性によって x，y 以外の選択肢の確率は変化せず，さらに事後的なパレート原理によって y の確率は 0 となるから

$$p(x, b) = \mu(V_1 \cup V_2) = p(x, a) + p(y, a)$$

が得られる。これは

$$\mu(V_1 \cup V_2) = \mu(V_1) + \mu(V_2)$$

を意味するから補助定理が示された。 ☺

この補助定理は V_1，V_2 がそれぞれ１人だけの集合である場合，２人からなる集合の比重はその２人の比重の和に等しく，さらに１人加わればその人を加えた３人の比重の合計が３人の集合の比重に等しいことなどを意味する。したがってあるグループの比重はそのグループを構成する人々の個人としての比重の和に等しくなり，補助定理 6.4の (1) より $p_N(x,a)=1$ であるから補助定理 6.5，6.6によって次の結果を得る。

系 6.1. 決定方法が戦略的に操作不可能であるとすると，その決定方法によって x に割り当てられる確率は，x を最も好む人々の個人としての比重の和に等しい。

これは決定方法が確率的に独裁的であることを意味するから定理 6.1が証明された。
最後に定理 6.1の逆を確認しておこう。

定理 6.2. 確率的に独裁的な決定方法は戦略的に操作不可能である。

証明. 確率的に独裁的な決定方法においては各自が最も好む選択肢にのみ正の確率が割り当てられ，またその確率はその選択肢を最も好む人々が誰であるかによってのみ決まる。したがってある人が本来の選好とは異なる選好に基づいてある選択肢を選ぶとすると，自分が最も好む選択肢の確率が小さくなってその分自分が選んだ選択肢の確率が大きくなる。したがってその人の期待効用は低下せざるを得ないから戦略的に操作不可能である。 ☺

6.4　人々の選好に無差別な関係を含む場合

先に証明した定理は人々の選好に無差別な関係を含む場合には成り立たない。それをギバードによって示された例を用いて確認してみる。

例　連続的な独裁制 (serial dictatorship) と呼ばれる次のような決定方法を考えてみよう。まずある１人の人（個人１とする）を第１の独裁者として固定し，任意の選好の組み合わせにおいて個人１が最も好む選択肢を選ぶ。それがただ１つであればそれのみが決定方法によって選ばれる選択肢（確率１が割り当てられる）となるが，もし２つ以上あるならば，次の第２の独裁者（個人 2）を固定し，個人１が最も好む選択肢の中で個人２が最も好む選択肢を選ぶ。それが複数あればそれぞれに正またはゼロの確率を与える。この決定方法は誰にとっても戦略的に操作可能ではない。

もし個人１が最も好む選択肢がただ１つであればそれに確率１が割り当てられ，個人２以下の人々がそれとは異なる選択肢を最も好むとしてもそれらの選択肢には正の確率は与えられない。この場合個人１の比重は１であり，他の人々の比重はすべてゼロである。次に，個人１が最も好む選択肢が x と y の２つであり，さらに x が個人２が最も好む選択肢に含まれているとしよう。すると x に確率１が割り当てられる。このときも個人１の比重は１であり，個人２の比重はゼロであると考えることができるかもしれない。しかし，もし y が個人２が最も好む選択肢に含まれているならば x ではなく y に確率１が割り当てられることになり，個人２の選好によって選択肢に与えられる確率が変わることになるので個人２の比重がゼロであるとは言えない。したがってこの決定方法は『確率的に独裁的』ではない。

7　個人の権利についてのセンの定理：リベラルパラドックス

7.1　パレート原理と個人の権利の両立性

社会的な選好を構成する，あるいは社会的選択関数が選ぶ対象となる選択肢の中には特定の個人に関わるものも含まれているかもしれない。そのような選択肢に関する判断はその個人に任されるべきだという考え方もできるだろう。すなわちその個人の権利の問題ということになる。一方ある選択肢について社会のすべての人々が共通の選好を持てばそれが社会の選好や選択関数に反映されるべきだという『パレート原理』も説得力のある理念である。個人の権利とパレート原理は両立するのだろうか。これに対して極めて単純な枠組みで否定的な結論を導き出すのがアマルティア・センによる『リベラル・パラドックス』と呼ばれる定理である[(33]。

初めにセンによって取り上げられた 1 つの例を見てみよう。

チャタレイ夫人の恋人　『チャタレイ夫人の恋人』という本が 1 冊だけあり，それを A 氏が読む，B 氏が読む，誰も読まない，という 3 つの選択肢があるものとする。それぞれを a，b，c と名づける。謹厳家の A 氏は，誰もその本を読まないことを最も望み，次には彼自身が読むことを望み，『影響を受けやすい』B 氏が読むことは最悪であると考えているとする。すなわち A 氏は c，a，b の順で選好する。一方，B 氏は 2 人とも読まないよりはどちらかが読むことを望むが，彼自身が読むよりも堅物の A 氏が読むことを望んでいるとする。つまり B 氏は a，b，c の順で選好する。さて，A 氏がこの本を読むか読まないかは A 氏の問題であるから，A 氏が自ら読むことを望まないのであれば社会としても A 氏が読むことよりも誰も読まないことを選好すべきであると言える。同様に B 氏が読むか読まないかは B 氏の問題であるから，B 氏が自ら読むことを望むのであれば社会としても誰も読まないことよりは B 氏が読むことを選好すべきである。つまり社会的には c が a よりも，また b が c よりも選好されるべきであるから，社会的な選好が非循環性を満たすならば a が b より社会的に選好されてはならない（推移性あるいは準推移性を満たすならば社会的選好は b，c，a の順でなければならない)。しかし A 氏，B 氏ともに，b よりも a を選好しているからパレート原理によれば a が b よりも選好されなければならず矛盾が生じる。

個人の権利を次のような条件で表す。

条件 L：自由主義 (liberalism)　各個人 i にとって少なくとも 1 つの選択肢の組 (x, y) があって，社会的選択において，どちらの方向にせよ個人 i が決定的である。すなわち xP_iy ならば社会的にも xPy，また yP_ix ならば yPx である。

この条件はすべての人に権利を与えるものであるがこれを特定の 2 人だけに弱めることができる。すなわち

条件 L*：最小自由主義 (minimal liberalism)　少なくとも 2 人の個人 j と k，および異なる選択肢の組 (x, y)，(z, w) があって，j と k がそれぞれの組についてどちらの方向にせよ決定的である。すなわち xP_jy ならば社会的にも xPy，yP_jx ならば yPx，zP_kw ならば zPw，wP_kz ならば wPz。

[(33]以下の内容は Sen (1979) による。

		B氏の戦略	
A氏		読む	読まない
の戦	読む	実現不可能	1,2
略	読まない	0,1	2,0

表 1: 『チャタレー夫人の恋人』と囚人のジレンマ

たった 2 人の権利を認めるだけであるがこれがパレート原理（条件 P）と両立しないことを示すことができる。

定理 7.1. 条件 U，P，および L*，非循環性を満たす社会的選択ルールは存在しない。

この定理においては推移性や準推移性は求めない。また条件 I（無関係選択肢からの独立性）も仮定していない。

証明. 条件 L* の定義において (x, y) と (z, w) が同一の組であれば，2 人の人が同じ選択肢の組について決定的であることはありえないのでこの条件は成り立たない。まず $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人 j：xP_jyP_jw

(2) 個人 k：wP_kx，yP_kw

(3) 他の人々：yP_iw

条件 L* によって社会的に xPy，wPx でなければならない。一方条件 P により yPw でなければならないが，これは非循環性に反する。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人 j：$wP_jxP_jyP_jz$

(2) 個人 k：$yP_kzP_kwP_kx$，

(3) 他の人々：wP_ix，yP_iz

条件 L* によって社会的に xPy，zPw でなければならない。一方条件 P により wPx，yPz でなければならないが，これは非循環性に反する。 ☺

7.2 センの定理と囚人のジレンマ

以上で証明した定理 7.1は実はゲーム理論の囚人のジレンマと同じ構造を持っていることが明らかになっている。『チャタレー夫人の恋人』の例を用いて確かめてみよう。A 氏，B 氏をゲームのプレイヤーとし，『チャタレー夫人の恋人』を読むか読まないかを戦略の選択肢とするとこのゲームの利得は表 1のように表される。数字の組の左側は A 氏の，右側は B 氏の利得である。各氏の利得はそれぞれの選好に対応するように表されている。また 1 冊の本をともに読むことはできないので表の左上の状態は実現不可能である。A 氏の最適反応は次のように表される。

（1）B 氏が『読む』を選んだとき $\longrightarrow$ 『読まない』（この場合読むことはできない）

（2）B 氏が『読まない』を選んだとき $\longrightarrow$ 『読まない』

一方 B 氏の最適反応は

（1）A 氏が『読む』を選んだとき $\longrightarrow$ 『読まない』（この場合読むことはできない）

（2）A 氏が『読まない』を選んだとき $\longrightarrow$ 『読む』

互いの最適反応が一致する『ナッシュ均衡』は B 氏が『読む』を選び A 氏が『読まない』を選んだ場合である。そのときの利得はぞれぞれ 0 と 1 となる。一方，A 氏が『読む』を B 氏が『読まない』を選んだときの利得は 1 と 2 でありナッシュ均衡よりも互いにとって（パレート的に）よりよい状態であるが，このとき A 氏の最適反応は『読まない』なので均衡とはならないから囚人のジレンマと同様のゲームになっている。

7.3　社会的選択関数のリベラルパラドックス

個人の選好を社会の選好に移す社会的選択ルールではなく，個人の選好に基づいて選択肢の集合からいくつかのものを選び出す社会的選択関数についてのリベラルパラドックスを検討してみよう[34]。ここで考える社会的選択関数はギバード・サタースウェイトの定理におけるようなただ 1 つの選択肢を選ぶものではなく，複数の選択肢を選ぶ可能性があるものである。社会的選択関数の対象となる（選ぶ可能性のある）選択肢の集合を A で表し，選好の組み合わせ a において選ばれる選択肢の集合を $C(a)$ で表す。まず条件 P と条件 L* を社会的選択関数の枠組みに当てはまるように書き直すことから始める。

条件 P*（パレート劣位にある選択肢の排除 (rejection of Pareto inferior states)） A に含まれる任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，ある選好の組み合わせ a においてすべての人々が xP_iy であれば y は $C(a)$ に含まれない。

条件 L（最小の自由に基づく選択肢の排除 (rejection based on minimal liberty)）** 少なくとも 2 人の個人 j と k，および A に含まれる異なる選択肢の組 (x, y)，(z, w) があり，任意の選好の組み合わせを a として xP_jy ならば y は $C(a)$ に含まれず，yP_jx ならば x は $C(a)$ に含まれない。また zP_kw ならば w は $C(a)$ に含まれず，wP_kz ならば z は $C(a)$ に含まれない。

条件 P* はすべての人々が y より x を好んでいて，かつ x が選択の対象に含まれていれば y は選ばれないことを求める条件である。また条件 L** はある人が y より x を好んでいて，かつ x が選択の対象に含まれていれば y を排除することができるというような権利を，少なくとも 2 人の人に与えようという条件である。社会的選択関数については非循環性の条件は意味がなく，任意の選好の組み合わせにおいて社会的選択関数が少なくとも 1 つの選択肢を選ぶということを条件とする。

これらの条件について以下の定理が示される。

定理 7.2. 条件 U，P*，および条件 L** を満たす社会的選択関数は存在しない。

[34] 以下の内容は Sen (1993) による。

証明. 証明は定理 7.1とよく似ている。まず条件 L** において $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のような選好の組み合わせ a を考える。u は x，y，w 以外の任意の選択肢を表す。

(1) 個人 j：$xP_jyP_jwP_ju$

(2) 個人 k：wP_kx，yP_kwP_ku

(3) 他の人々：yP_iwP_iu

条件 L** によって y および x は $C(a)$ に含まれない。一方条件 P* によって w も u も $C(a)$ に含まれない[35]。そうすると社会的選択関数は何も選べなくなってしまうので矛盾である。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のような選好の組み合わせ b を考える。u は x，y，z，w 以外の任意の選択肢を表す。

(1) 個人 j：$wP_jxP_jyP_jzP_ju$

(2) 個人 k：$yP_kzP_kwP_kxP_ku$,

(3) 他の人々：wP_ix，yP_izP_iu

条件 L** によって y および w は $C(b)$ に含まれない。一方条件 P* によって x も z も u も $C(b)$ に含まれない[36]。そうすると社会的選択関数は何も選べなくなってしまうので矛盾である。 ☺

7.4 非賦課性と個人の権利の両立性

定理 7.1では社会的選好に非循環性を要求し条件 U（定義域の非限定性）を仮定すればパレート原理と個人の権利が両立しないことを示したが，実はもっと強い定理，すなわち非賦課性と個人の権利が両立しないことを示すことができる[37]。非賦課性の条件はウィルソンの定理において取り扱ったが，ここではもう少し強い条件を仮定する。ただし，条件 I（無関係選択肢からの独立性）の精神に類似したものを含める。

厳密な非賦課性 (strict non imposition) 任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，人々の他の選択肢に関する選好に対応して xPy となるような x と y に関する人々の選好の組み合わせが少なくとも 1 つはある[38]。

条件 I を仮定しなければ x，y 以外の選択肢に関する選好が x と y についての社会的選好に影響することがある。この条件はその場合でも x と y に関する適当な選好の組み合わせを選べば xPy となることを求めるものである。パレート原理が成り立てば任意の x，y についてすべての人々が xP_iy のときには他の選択肢に関する選好に関係なく xPy となるので厳密な非賦課性が満たされている。しかし逆は必ずしも成り立たない。すなわち厳密な非賦課性はパレート原理よりも弱い条件である。この弱い条件でも個人の権利と両立しないことが示される。

---

[35] すべての人々が w より y を選好している。

[36] すべての人々が x より w を，z より y，u より z を選好している

[37] 以下の内容は Kelsey (1985) による。

[38] もし条件 I を仮定するなら，x と y についての社会的選好はそれらに関する人々の選好のみによって決まるので『人々の他の選択肢に関する選好に対応して』という部分は必要ない。

定理 7.3. 条件 U，L*，厳密な非賦課性，非循環性を満たす社会的選択ルールは存在しない。

証明. 証明は定理 7.1とよく似ている。まず条件 L* において $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人 j：xP_jy，xP_jw

(2) 個人 k：wP_kx，yP_kx

(3) 他の人々：特定しない

条件 L* によって社会的に xPy，wPx でなければならない。一方 y と w については各個人の選好について何も仮定されていないし，推移性によっても何も制約されない。厳密な非賦課性により yPw となるような選好の組み合わせがある。しかしこれは非循環性に反する。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人 j：xP_jy，xP_jz，wP_jy，wP_jz

(2) 個人 k：zP_kw，zP_kx，yP_kw，yP_kx

(3) 他の人々：特定しない

条件 L* によって社会的に xPy，zPw でなければならない。一方 y と z，x と w については各個人の選好について何も仮定されていないし，推移性によっても何も制約されない。厳密な非賦課性により yPz かつ wPx となるような選好の組み合わせがある。しかしこれは非循環性に反する。 ☺

社会的選好に非循環性ではなく推移性を要求することによって厳密な非賦課性をウィルソンの定理と同じような非賦課性に弱めることができる（厳密な非賦課性と同様に条件 I の精神に類似したものが含まれている）。

非賦課性 (non imposition) 任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，人々の他の選択肢に関する選好に対応して xRy となるような x と y に関する人々の選好の組み合わせが少なくとも 1 つはある。

この条件は x と y に関する適当な選好の組み合わせを選べば xRy となることを求めるものである。

定理 7.4. 条件 U，L*，非賦課性，推移性を満たす社会的選択ルールは存在しない。

証明. 証明は定理 7.3とほぼ同じである。まず条件 L* において $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のような選好の組み合わせを考える。

(1) 個人 j：xP_jy，xP_jw

(2) 個人 k：wP_kx，yP_kx

(3) 他の人々：特定しない

条件 L* によって社会的に xPy，wPx でなければならない。一方 y と w については各個人の選好について何も仮定されていないし，推移性によっても何も制約されない。非賦課性により yRw となるような選好の組み合わせがある。しかしこれは推移性に反する。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のような選好の組み合わせを考える。

（1）個人 j：xP_jy，xP_jz，wP_jy，wP_jz

（2）個人 k：zP_kw，zP_kx，yP_kw，yP_kx

（3）他の人々：特定しない

条件 L* によって社会的に xPy，zPw でなければならない。一方 y と z，x と w については各個人の選好について何も仮定されていないし，推移性によっても何も制約されない。非賦課性により yRz かつ wRx となるような選好の組み合わせがある。しかしこれは推移性に反する。 ☺

7.5 社会的選択関数の場合の非賦課性と個人の権利の両立性

社会的選択関数の場合の非賦課性と個人の権利の両立性について検討してみよう。社会的選択関数の場合には非賦課性を次のように定義する。

非賦課性 (non imposition) 任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，人々の他の選択肢に関する選好に対応して y が $C(a)$ に含まれないような選好の組み合わせ a がある。

この条件は x と y に関する適当な選好の組み合わせを選べば y が社会的選択関数によって選ばれないようにできることを求めるものである。条件 P* が成り立てば x，y 以外の選択肢に関する人々の選好に関わらずすべての人々が xP_iy であれば y が社会的選択関数によって選ばれないので，条件 P* はこの非賦課性を意味している。すなわち非賦課性は条件 P* よりも弱い条件である。この定義のもとで次の定理を証明する。

定理 7.5. 条件 U，非賦課性，および条件 L** を満たす社会的選択関数は存在しない。

証明. 証明は定理 7.4とよく似ている。まず条件 L** において $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のような選好の組み合わせ a を考える。u は x，y，w 以外の任意の選択肢を表す。

（1）個人 j：xP_jy，xP_jw，uP_jy

（2）個人 k：wP_kx，yP_kx，yP_ku

（3）他の人々：特定しない

条件 L** によって y および x は $C(a)$ に含まれない。一方 y と w，x と u については各個人の選好について何も仮定されていないし，個人の選好の推移性によっても何も制約されない。非賦課性により w および u が $C(a)$ に含まれないような選好の組み合わせがある。そうすると社会的選択関数は何も選べなくなってしまうので矛盾である。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のような選好の組み合わせ b を考える。u は x，y，z，w 以外の任意の選択肢を表す。

（1）個人 j：xP_jy，xP_jz，wP_jy，wP_jz，xP_ju，wP_ju

（2）個人 k：zP_kw，zP_kx，yP_kw，yP_kx，uP_jx，uP_jw

（3）他の人々：特定しない

条件 L** によって y および w は $C(b)$ に含まれない。一方 y と z，x と w，y と u については各個人の選好について何も仮定されていないし，推移性によっても何も制約されない。非賦課性により x，z および u が $C(b)$ に含まれないような選好の組み合わせがある。そうすると社会的選択関数は何も選べなくなってしまうので矛盾である。 ☺

8 結びにかえて

本稿では複数の選択肢を選ぶ可能性のある社会的選択関数や確率的な社会的選好，確率的な社会的選択関数，個人の権利とパレート原理の両立性など種々な問題を扱ってきたが，それぞれに社会的選択理論の重要なテーマとなっており現在も活発に研究が展開されているものである。これですべてを網羅したわけではないが，前稿と合わせて一通り社会的選択理論の主要な内容を紹介できたかと思う。

さらに研究を発展させより新しい問題について考えて行きたい。

参考文献

Kenneth Arrow, *Social Choice and Individual Values* (2nd ed.), John Wiley，1963（邦訳：ケネス・アロー著 長名寛明訳『社会的選択と個人的評価』（日本経済新聞社）, 1977)

S. Barberá and H. Sonnenschein, "Preference aggregation with randomized social orderings" (*Journal of Economic Theory*, 1978)

S. Ching and L. Zhou, "Multi-valued strategy-proof social choice rules" (*Social Choice and Welfare*，近刊)

J. Duggan and T. Schwartz, "Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized", (*Social Choice and Welfare*, 2000)

A. Feldman, "Strongly nonmanipulable multi-valued collective choice rules" (*Public Choice*, 1980)

A. Gibbard, "Manipulation of voting schemes: A general result" (*Econometrica*, 1973)

A. Gibbard, "Manipulation of schemes that mix voting with chance" (*Econometrica*, 1977)

Kelsey, "The liberal paradox: A generalisation" (*Social Choce and Welfare*, 1985)

M. Malawski and L. Zhou, "A note on social choice theory without the Pareto principle" (*Social Choice and Welfare*, 1994)

A. Mas-colell and H. Sonnenschein, "General possibility theorems for group decisions" (*Review of Economic Studies*, 1972)

M. A. Satterthwaite, "Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions" (*Journal of Economic Theory*, 1975) .

Amartya Sen, *Collective Choice and Social Welfare*, North-Holland，1979（初版 1970）（邦訳：アマルティア・セン著 志田基与師他訳『集合的選択と社会的厚生』（勁草書房），2000)

Amartya Sen, "Internal consistency of choice" (*Econometrica*, 1993)

鈴村興太郎，経済計画理論，筑摩書房，1982.

R. B. Wilson，"Social choice theory without the Pareto principle" (*Journal of Economic Theory*，1972).

Yasuhito Tanaka, "Generalized monotonicity and strategy-proofness for non-resolute social choice correspondences", (*Economics Bulletin*, **4**, No.12, University of Illinois, 2001, http://cbadbsrv.cba.uiuc.edu/economicsbulletin/Abstract.asp?PaperID=EB-01D70008, http://cbadbsrv.cba.uiuc.edu/economicsbulletin/2001/volume4/EB-01D70008A.pdf)

著者略歴

田中靖人（たなかやすひと）
1953年　大阪府岸和田市生まれ
1976年　京都大学工学部卒業
1983年　横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了
1986年　東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得
山形大学人文学部講師，同助教授，中央大学法学部助教授を経て
現在　中央大学法学部教授，経済学博士（中央大学）
専攻　理論経済学，ゲーム理論とその応用

著書

『ゼロから始める経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゼロから始める国際経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゲーム理論と寡占』（中央大学出版部, 2001）

主要論文

“Tariffs and welfare of an exporting country in a free entry oligopoly under integrated markets”, *Oxford Economic Papers* Vol. 44, Oxford University Press, 1992.

“Export subsidies under dynamic duopoly”, *European Economic Review* Vol. 38, North-Holland, 1994.

“Long run equilibria in an asymmetric oligopoly”, *Economic Theory* Vol. 14, Springer-Verlag, 1999.

“A finite population ESS and long run equilibria in an n players coordination game”, *Mathematical Social Sciences* Vol. 39, North-Holland, 2000.

“Stochastically stable states in an oligopoly with differentiated goods: Equivalence of price and quantity strategies”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 34, North-Holland, 2000.

“Profitability of price and quantity strategies in a duopoly with vertical product differentiation”, *Economic Theory* Vol. 17, Springer-Verlag, 2001.

“Profitability of price and quantity strategies in an oligopoly”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 35, North-Holland, 2001.

“Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentiated goods”, *International Journal of Industrial Organization* Vol. 19, North-Holland, 2001.

E-Mail: yasuhito@tamacc.chuo-u.ac.jp