経済学のための位相数学の基礎とブラウワーの不動点定理

中央大学 法学部

田中靖人

〒 192-0393 東京都八王子市東中野 742-1 中央大学 2 号館 7 階

E-mail: yasuhito@tamacc.chuo-u.ac.jp

目 次

本稿は競争経済の一般均衡やゲーム理論におけるナッシュ均衡の存在証明など，経済学において広く用いられているブラウワーの不動点定理 (Brouwer's fixed point theorem) の証明を理解することを主な目的として，それに必要な位相数学の基礎と関連する話題について解説したものである[1]。

[1]本稿に関する研究，執筆にあたって「(財団法人）全国銀行学術研究振興財団」から研究助成を受けた。同財団に対して厚く感謝する。

1　位相空間と関数の連続性

1.1　ユークリッド空間と距離

まずユークリッド空間について考える（本稿では「空間」と「集合」は同じ意味で用いる）。0 次元ユークリッド空間はただ 1 点からなる空間，1 次元ユークリッド空間は 1 本の直線からなる空間である。1 次元ユークリッド空間において適当に原点と目盛りを決めると，直線上の各点の位置，すなわち座標を数字（実数）で表すことができ，いわゆる数直線と呼ばれるものになる。2 次元ユークリッド空間は一つの平面であり，やはり適当に原点と原点で直交する二つの軸とその軸上の目盛りを決めれば，平面上の各点の座標を各軸からの距離を表す二つの数字の組で表現することができる。3 次元ユークリッド空間はわれわれが住むこの空間であり，適当に原点と原点で直交する三つの軸とその軸上の目盛りを決めれば，空間内の各点の座標を二つの軸によって作られる平面からの距離を表す三つの数字の組で表現することができる。さらにわれわれがイメージすることはできないが 4 次元，5 次元, ... のユークリッド空間も 4 つ，5 つ , ... の数字の組によって表現されるものとして考えることができる。n 次元ユークリッド空間を $\mathbb{R}^n$ で表す（1 次元ユークリッド空間は $\mathbb{R}$）。

2 次元ユークリッド空間（平面）$\mathbb{R}^2$ における 2 点を $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$，$\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ としてその 2 点間の距離を次のように定義する。

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}$$

この距離は平面上で 2 点を結ぶ線分の長さに等しい（三平方（ピタゴラス）の定理から導かれる）。同様にして 3 次元ユークリッド空間における 2 点を $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ とするとその 2 点間の距離は

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2}$$

と表される。これも空間内における 2 点を結ぶ線分の長さに等しい（空間内の線分から一つの平面への影を考えることによってやはり三平方の定理を用いて導くことができる）。一般的に n 次元ユークリッド空間における 2 点 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ と $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ の距離は次のように表される。

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

この距離をユークリッドの距離と呼ぶ。

n 次元ユークリッド空間の距離について次の関係が成り立つ。

(1). すべての $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ について $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\geq 0$（距離は負ではない）

(2). すべての $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ について $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$（距離はどちら向きに測っても等しい）

(3). すべての $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$ について $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}-\mathbf{z}|\geq|\mathbf{x}-\mathbf{z}|$（三角不等式）

(4). $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=0$ のとき，またそのときにのみ $\mathbf{x}=\mathbf{y}$（$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が同一の点）である。

この内 (1), (2), (4) は明らかである。(3) は，幾何学的には三角形の 2 辺の長さの和は残りの 1 辺の長さより大きいというということを意味する（等しい場合 3 点は同一直線上にある)。以下のようにして確認できる。λ に関する 2 次式

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i\lambda)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\lambda+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\lambda^2$$

を考える。これは負であってはならないから二次方程式の判別式により

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

を得る。この式は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=&\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\ \leq&\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2\end{aligned}$$

を意味する。ここで $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$ とおくと上式は

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}$$

となる。これは n 次元ユークリッド空間における 3 点 $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $\mathbf{y}=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$, $\mathbf{z}=\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$ について

$$|\mathbf{x}-\mathbf{z}|\leq|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}-\mathbf{z}|$$

であることを意味する。

定義 1.1 (ユークリッド空間の開集合 (open set)). ユークリッド空間 X の部分集合 V が次の条件を満たすとき，開集合であると言う。

> V のあらゆる点 $\mathbf{v}\in V$ について $\{\mathbf{x}\in X:\ |\mathbf{x}-\mathbf{v}|<\delta\}\subset V$ を満たす $\delta>0$ が存在する（すべての $\mathbf{v}$ が V の端にはなく $\mathbf{v}$ の周辺に V の点がある)。

空集合（何も含まない集合）$\emptyset$ も開集合であると考える。X 自身も開集合である。開集合のいかなる和集合も開集合であり，また有限個の開集合の共通部分も開集合であることを示すことができる（これは後でより一般的な距離空間について証明する)。この定義が常識的な開集合のイメージと一致することを簡単な例で確認してみよう。1 次元ユークリッド空間の開区間 $(0,1)$ において（「開区間」とは区間の両端を含まない区間であり，1 次元ユークリッド空間における開集合である)，0 に近い点として $\mathbf{v}=\varepsilon$ をとると，どのような $\varepsilon>0$ についても上の定義において $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$ とおけば，$\frac{1}{2}\varepsilon>0$ であって $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}:\ |\mathbf{x}-\mathbf{v}|<\frac{1}{2}\varepsilon\}\subset(0,1)$ が成り立つ。一方閉区間 $[0,1]$ においては（「閉区間」とは区間の両端を含む区間であり，1 次元ユークリッド空間における閉集合である。閉集合については後で説明する)，点 0 または 1 からわずかでも正の距離にある部分は半分がその区間からはみ出してしまうので開集合とはならない。

1.2　距離空間と開集合

ユークリッド空間を抽象化したものが距離空間である。

定義 1.2 (距離空間 (metric space)). 距離空間とは，ある集合 X についてその任意の要素（あるいは点，要素とは集合を構成するもの）x，y について次の条件を満たす実数値関数 $d(x,y)$ が定義されたものであり，d は距離（または距離関数）と呼ばれる。距離を明示して距離空間を表す場合は (X,d) と書く。

(1). すべての $x,y \in X$ について $d(x,y) \geq 0$（2 点間の距離は負ではない）。

(2). すべての $x,y \in X$ について $d(x,y) = d(y,x)$（距離はどちら向きに測っても等しい）。

(3). すべての $x,y,z \in X$ について $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$（三角不等式）が成り立つ。

(4). $x = y$ のとき，またそのときにのみ $d(x,y) = 0$ である（2 点間の距離がゼロのときはその 2 点は同一の点であり，また同一の点であれば距離はゼロである）。

n 次元ユークリッド空間はユークリッドの距離によって距離空間となる。またユークリッド空間の部分集合も同様にユークリッドの距離によって距離空間となる。たとえば 1 次元ユークリッド空間の部分集合としては座標 x が $-1 \leq x \leq 1$ を満たすような点の集合や，$x > 0$ を満たす点の集合が考えられる，それ以外の次元についても同様である。

定義 1.3 (開球 (open ball)). (X,d) を距離空間とする。X の点 x とある実数 $r > 0$ について次の式で定義される集合 $B_X(x,r)$ を，X における x を中心とする半径 r の開球と言う。

$$B_X(x,r) = \{x' \in X:\ d(x',x) < r\}$$

これは x からの距離が r より小さい X に属する点の集合を表しており，3 次元ユークリッド空間ではまさに開球（表面を含まない球の内部）となる。

定義 1.4 (開集合 (open set)). (X,d) を距離空間とする。X の部分集合 V が次の条件を満たすとき開集合であると言う。

V のあらゆる点 $v \in V$ について $B_X(v,\delta) \subset V$ を満たす $\delta > 0$ が存在する。

この定義はユークリッド空間においては定義 1.1を意味する。やはり空集合も開集合であるとする。

補題 1.1. X を距離空間，d をその距離関数，x_0 を X の点とする。そのとき，任意の $r > 0$ について半径 r の開球 $B_X(x_0,r)$ は X の開集合である。

証明. $x \in B_X(x_0,r)$ とすると，ある $\delta > 0$ について $B_X(x,\delta) \subset B_X(x_0,r)$ となることを示せばよい。$\delta = r - d(x,x_0)$ とすると $d(x,x_0) < r$（$x \in B_X(x_0,r)$ より）であるから $\delta > 0$ である。$x' \in B_X(x,\delta)$ とすると三角不等式により

$$d(x',x_0) \leq d(x',x) + d(x,x_0) < \delta + d(x,x_0) = r$$

となるから，$x' \in B_X(x_0,r)$ を得る。したがって $B_X(x,\delta) \subset B_X(x_0,r)$ となり（$B_X(x,\delta)$ に含まれる点は $B_X(x_0,r)$ に含まれる），$B_X(x_0,r)$ が開集合であることが示された。 ☺

例 1.1. 集合の要素はユークリッド空間の点ばかりではない。ユークリッド空間における関数も集合の要素となりうる。関数の集合は関数空間と呼ばれる。たとえば閉区間 $[0,1]$ から $\mathbb{R}$ への連続な関数の集合を考えてみよう。$y=f(x)$, $y=g(x)(y\in\mathbb{R},\ x\in[0,1])$ を二つの関数とするとき

$$d(f,g)=\max_{[0,1]}|f(x)-g(x)|$$

で定義される実数（$[0,1]$ における $f(x)$ と $g(x)$ との差の絶対値の最大値）はこの関数空間について距離の条件を満たしている。ここでは $[0,1]$ の全体にわたって $f(x)=g(x)$ であるときに $f(x)$ と $g(x)$ が等しいものとし，$f(x)\equiv g(x)$ と表す。絶対値をとっているから明らかに $d(f,g)\geq 0$ が成り立つ。また，やはり絶対値をとっているから $[0,1]$ の全体にわたって $f(x)=g(x)$ でなければ $d(f,g)=0$ とはならないし，$f(x)\equiv g(x)$ であれば $d(f,g)=0$ である。三つの関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ について

$$\begin{aligned} d(f,h)&=\max_{[0,1]}|f(x)-h(x)|=\max_{[0,1]}|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)| \\ &\leq\max_{[0,1]}|f(x)-g(x)|+\max_{[0,1]}|g(x)-h(x)|=d(f,g)+d(g,h) \end{aligned}$$

より三角不等式が得られる。したがって $[0,1]$ から $\mathbb{R}$ への連続な関数の集合は上記の距離関数によって距離空間となる。

1.3 位相空間と開集合

距離空間をさらに抽象化したものが位相空間である。距離空間は距離によって定義されたが位相空間は開集合によって定義される。

定義 1.5 (位相空間). ある集合 X の部分集合（開集合 (open set) と呼ぶ）の組（集まり）が次の条件を満たすとき X は位相空間である。

(1). 空集合 $\emptyset$ と X 自身はともに開集合である。

(2). 開集合のあらゆる和集合は開集合である（無限個の場合も含む)。

(3). 有限個の開集合の共通部分は開集合である（無限個の場合は含まない)。

ある位相空間のすべての開集合の組を位相 (topology) と呼ぶ。ある位相空間の位相を明確に表す必要がある場合には，たとえば X の位相を τ として位相空間 X を (X,τ) のように表すが，特に混乱を招かない場合は単に X だけで表す。

まず距離空間が位相空間であることを示そう。

補題 1.2. X を距離空間とすると X の開集合の組は位相空間の条件を満たしている。

証明. (1). 定義によって空集合は開集合である。また X 全体については開集合の条件が満たされている（X に含まれない要素はないので X の点 x のあらゆる開球は当然 X に含まれる)。

(2). X の開集合のある組を $\mathcal{A}$ とし，U を $\mathcal{A}$ に含まれるすべての開集合の和集合であるとする。U が開集合であることを示そう。$x\in U$ とすると x は $\mathcal{A}$ に含まれるある開集合 V の要素である。したがって $B_X(x,\delta)\subset V$ となるような δ がある。一方 $V\subset U$ であるから $B_X(x,\delta)\subset U$ となるので U は開集合である。

(3). $V_1, V_2, \ldots, V_k$ を X に含まれる有限個の開集合の組，それらの共通部分を $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ とする。x をすべての j について $x \in V_j$ であるような（$V_1, V_2, \ldots, V_k$ のすべての集合の要素である）点とすると，すべての j について $B_X(x, \delta_j) \subset V_j$ となるような実数 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ がある。$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ の内で最小のものを δ とすると，k は有限で各 δ_j は正であるから $\delta > 0$ である。さらに x はすべての V_j に属しているので，すべての j について $B_X(x, \delta) \subset B_X(x, \delta_j) \subset V_j$ であるから，$B_X(x, \delta) \subset V$ となり，V は開集合である。

☺

これにより距離空間はその距離によって定義される開集合の組を位相とする位相空間であることがわかる。ユークリッド空間は距離空間であったから，ユークリッドの距離によって定義される開集合の組を位相とする位相空間である。

位相空間の条件の内 (3) の有限個という制約は重要なものである。たとえば 1 次元ユークリッド空間において n を自然数として開区間 $(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ を考え，その $n = 1, 2, \ldots,$ の無限個の共通部分をとると，あらゆる n について $(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ に含まれる点の集合は閉区間 $[0, 1]$ となり開集合ではない。

1.4 閉集合

定義 1.6 (閉集合 (closed set)). X を（ある位相を持った）位相空間であるとする。X の部分集合 F はその補集合 $X \setminus F$（F に属さない X の要素の集合）が開集合であるとき，またそのときにのみ閉集合であると言う。

空集合と X 自体はともに開集合であるが，空集合の（X における）補集合は X，X の補集合は空集合であるから，空集合と X は開集合であるとともに閉集合でもある。

たとえば 1 次元ユークリッド空間の閉区間（両端を含む区間）$F = [0, 1]$ の補集合は $\mathbb{R} \setminus F = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$（$-\infty$, ∞ はいくらでも小さい数，いくらでも大きい数を含んでいるということ）であるが，この集合のどんな点 $\mathbf{v}$ においても $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} :\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta\} \subset X \setminus F$ を満たす $\delta > 0$ をとることができるので開集合であり，したがって F は閉集合である。

開集合と閉集合は全体の集合に対して相対的なものである。たとえば数直線上（1 次元ユークリッド空間）において $[-1, 1]$（-1 と 1 を含む区間）は閉集合，$(-1, 1)$（-1 も 1 も含まない区間）は開集合，$(-1, 1]$（-1 は含まず，1 は含む区間）は開集合でも閉集合でもないが，X として $[-2, 1]$ をとると $(-1, 1]$ は開集合となる（点 1 を中心とする半径 $\delta (\delta < 3)$ の開球は数直線全体においては 1 より大きい部分を含むが $[-2, 1]$ においては含まないから，その開球は $[-2, 1]$ に含まれている)。

集合の演算によって，X のいくつかの部分集合の和集合（その部分集合のいずれかに含まれる要素の集合）は各部分集合の補集合の共通部分（各部分集合のいずれにも含まれない要素の集合）の補集合に等しく，X のいくつかの部分集合の共通部分（その部分集合のすべてに含まれる要素の集合）は各部分集合の補集合の和集合（その部分集合のすべてには含まれない要素の集合）の補集合に等しい。したがって次の補題を得る。

補題 1.3. 位相空間にける閉集合は次の条件を満たす。

(1). 空集合 $\emptyset$ と X 自身はともに閉集合である。

(2). 有限個の閉集合の和集合は閉集合である（無限個の場合は含まない)。

(3). 有限個または無限個の閉集合の共通部分は閉集合である。

証明. (2) は「有限個の閉集合の和集合の補集合」は「有限個の開集合の共通部分」であることから導かれる。また (3) は「有限個または無限個の閉集合の共通部分の補集合」は「有限個または無限個の開集合の和集合」であることから導かれる。 ☺

ここでも (2) の有限個の条件を確認してみよう。1 次元ユークリッド空間において n を自然数として閉区間 $[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ を考え，その $n = 3, 4, \ldots,$ の無限個の和集合をとると，0 と 1 はどのような n についても $[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ には含まれないから，その和集合（いずれかの n についてこの閉区間に含まれる点の集合）は開区間 $(0, 1)$ になり閉集合とはならない。

1.5 ハウスドルフ空間

定義 1.7 (ハウスドルフ空間 (Hausdorff space)). 位相空間 X が次の条件を満たすときハウスドルフ空間であると言う。

> x と y を X の異なる点であるとすると，$x \in U$，$y \in V$ かつ $U \cap Y = \emptyset$（U と V とは共通部分を持たない）を満たす開集合 U と V が存在する。

補題 1.4. 距離空間はハウスドルフ空間である。

証明. 距離空間 X の距離を d で表し, x と y を互いに異なる X の点であるとする。$\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ とおくと x，y それぞれを中心とする開球 $B_X(x, \varepsilon)$ と $B_X(y, \varepsilon)$ は開集合である。もちろん x，y それぞれはこれらの開球に含まれている。もしこれらの共通部分 $B_X(x, \varepsilon) \cap B_X(y, \varepsilon)$ が空集合ではない（共通部分が存在する）とすると $d(x, z) < \varepsilon$, $d(y, z) < \varepsilon$ を満たす $z \in X$ がある（z は $B_X(x, \varepsilon)$ と $B_X(y, \varepsilon)$ の両方に含まれる点である)。しかしそうすると三角不等式によって $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2\varepsilon$ となり $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ と矛盾する。したがって $B_X(x, \varepsilon) \cap B_X(y, \varepsilon) = \emptyset$ であるから X はハウスドルフ空間である。 ☺

これによりユークリッド空間もハウスドルフ空間である。

1.6 相対位相（部分空間位相）

X を位相空間，τ をその位相，A を X の部分集合とする。τ_A を各 $V \in \tau$ について $V \cap A$ であるような集合全体の組とすると τ_A は A の位相になる。これを A の相対位相（あるいは部分空間位相）と言う。$V \cap A$ であるような集合の有限個または無限個の和集合は τ に含まれる集合 V の有限個または無限個の和集合と A の共通部分であり，前者は τ に含まれているからその共通部分は τ_A に含まれる。

> 二つの集合 V_1, V_2 について $V_1 \cap A$, $V_2 \cap A$ はそれぞれ V_1 と A の両方に含まれる点の集合，および V_2 と A の両方に含まれる点の集合であるから，その二つの集合の和集合 $(V_1 \cap A) \cup (V_2 \cap A)$ は A に含まれていて，かつ V_1 または V_2 に含まれる点の集合 $(V_1 \cup V_2) \cap A$ に等しい。

また $V \cap A$ であるような集合の有限個の共通部分は τ に含まれる集合 V の有限個の共通部分と A の共通部分であり，前者は τ に含まれているからその共通部分は τ_A に含まれる。

> 二つの集合 V_1, V_2 について $V_1 \cap A, V_2 \cap A$ の共通部分 $(V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A)$ は A に含まれていて，かつ V_1 にも V_2 に含まれる点の集合 $(V_1 \cap V_2) \cap A$ に等しい。

ここで次の補題を得る。

補題 1.5. X を距離空間，d をその距離，A を X の部分集合とする。次の条件が満たされるとき，またそのときにのみ A の部分集合 W は A の相対位相において開集合である。

> W の各々の点 w について $\{a \in A:\ d(a,w) < \delta\} \subset W$ が成り立つような δ が存在する。

したがって A の相対位相は A を距離空間と見て得られる位相（距離によって定義された開集合に基づく位相）と一致する。

証明. (1). W が A の相対位相において開集合であると仮定すると，$W = U \cap A$ となるような X の開集合 U が存在する。U が X の開集合であり W はその部分集合であるから，w を W の点とすると

$$\{x \in X:\ d(x,w) < \delta\} \subset U$$

が成り立つような $\delta > 0$ が存在する。そのとき A は X の部分集合であるから

$$\{a \in A:\ d(a,w) < \delta\} \subset U \cap A = W$$

が得られる。

(2). 逆に W が A の部分集合であり，各々の $w \in W$ について $\{a \in A:\ d(a,w) < \delta_w\} \subset W$ を満たすような δ_w が存在するものとする。ここで W に属する点 w を中心とする開球 $B_X(w,\delta_w)$ 全体の和集合として U を定義する。

$$B_X(w,\delta_w) = \{x \in X:\ d(x,w) < \delta_w\}$$

である。各開球は開集合であるから U も開集合である。さらにあらゆる $w \in W$ について

$$B_X(w,\delta_w) \cap A = \{a \in A:\ d(a,w) < \delta_w\} \subset W$$

である（上の W の定義から）。したがって $U \cap A \subset W$ であり（各 $B_X(w,\delta_w) \cap A$ が W に含まれ $U \cap A$ はそれらの和集合であるからやはり W に含まれる）。一方，あらゆる $w \in W$ について $W \subset A$ かつ $\{w\} \subset B_X(w,\delta_w) \subset U$ であり，W はそのような $\{w\}$ 全体の和集合であるから $W \subset U \cap A$ である。ゆえに $U \cap A = W$ となり，U は A の開集合であるから W は A の相対位相において開集合であることが導かれる。

☺

X を位相空間，A をその部分集合とすると相対位相に関して以下のことが成り立つ。

- A の部分集合 B は X のある閉部分集合 F によって $B = A \cap F$ と表される場合に，またそのときにのみ A の相対位相において閉集合である。

- A がそれ自身 X の開集合であれば，A の部分集合 B は，それ自身が X の開集合であるとき，またそのときにのみ A の相対位相において開集合である。
- A がそれ自身 X の閉集合であれば，A の部分集合 B は，それ自身が X の閉集合であるとき，またそのときにのみ A の相対位相において閉集合である。

それぞれ確認してみよう。

(1). $B = A \cap F$ の A における補集合は X における F の補集合 $X \setminus F$（これは開集合）と A との共通部分 $A \cap X \setminus F$ であり，それは A の相対位相において開集合であるからその補集合である $A \cap F$ は閉集合である。

逆に B が A において閉集合であればその A における補集合 $A \setminus B$ は A において開集合であるから X のある開集合 V によって $V \cap A$ と表される。B は A におけるその補集合であり，したがって X における V の補集合（これは閉集合）と A との共通部分として表される。

(2). A がそれ自身 X の開集合であるならば位相空間の定義によって X の開集合 V と A の共通部分 $V \cap A$ も X の開集合であり A の開集合はすべて X の開集合でなければならない。逆に X の開集合であって A の部分集合になっている集合はそれ自身を上記の V と考えればよい。

(3). (2) と同様に閉集合の性質から導かれる。

1.7　点列と収束

定義 1.8. 位相空間 X における点列 (sequence)$x_1, x_2, \ldots$ は次の条件を満たすとき X の点 p に収束する (converge) と言う。

> p を含むどのような開集合 U についてもある自然数 N があって，すべての $j \geq N$（N 以上の番号の点列）について $x_j \in U$ となっている。

そのとき p を点列の極限 (limit) と呼ぶ。これは p を含む開集合 U をどんなに小さくとってもある番号以上の点列がすべてその中に含まれるということであるから，点列が限りなく p に近づいて行くことを意味する。

ハウスドルフ空間においては点列の極限はただ一つであることが示される。

補題 1.6. ハウスドルフ空間 X における点列が収束するとき，ただ 1 点に収束する。

証明. 点列を $(x_j : j \in \mathbb{N})$ で表し（$\mathbb{N}$ は自然数の集合 $\{1, 2, 3, \ldots\}$ である），さらに (x_j) と簡略化する。(x_j) の極限が p と q の二つあるものと仮定しよう。X はハウスドルフ空間であるから $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たす開集合 U, V がある。p，q はともに極限であるから $j \geq N_1$ および $j \geq N_2$ について $x_j \in U$, $x_j \in V$ となるような自然数 N_1, N_2 が存在する。そのとき $x_j \in U \cap V$ となるが，$U \cap V = \emptyset$ であるからそれは不可能である。したがって極限は一つしかない。 ☺

収束しない点列もある。たとえば 1 次元ユークリッド空間において $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ と 1 と 2 をくり返す点列や，$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ と限りなく大きくなって行く点列は収束しない。

補題 1.7. X を位相空間，F を X の閉集合，$(x_j:\ j \in \mathbb{N})$ を F の点列とする。$(x_j:\ j \in \mathbb{N})$ が X のある点 p に収束するならば $p \in F$ である。

証明. p が F に属さない，したがって F の補集合 $X \setminus F$ に属すると仮定してみよう。F は閉集合であるから $X \setminus F$ は開集合である。$(x_j:\ j \in \mathbb{N})$ が p に収束するから $j \geq N$ に対して $x_j \in X \setminus F$ となるような自然数 N がある。しかし，これは x_j が F に属することに矛盾する。したがって $p \in F$ である。 ☺

これは閉集合の重要な特徴である。

1.8 距離空間における関数の連続性

それぞれが 1 次元ユークリッド空間である X から Y への関数 $y = f(x)$ が X のある点 x_0 で連続であるというのは，x が x_0 に近づくとき $f(x)$ も $f(x_0)$ に近づくということである。正確に言えば「x が x_0 に収束するとき，$f(x)$ も $f(x_0)$ に収束する」ということであるが，別の形では「どのような実数 ε に対しても $|x_0 - x'| < \delta$ ならば $|f(x_0) - f(x')| < \varepsilon$ となるような実数 δ が存在する」と表される。

この二つの定義が同値（同じ内容）であることを確認してみよう。

補題 1.8. X から Y への関数 $y = f(x)$ の x_0 における連続性について以下の二つの定義は同値である。

(1). x が x_0 に収束するとき，$f(x)$ も $f(x_0)$ に収束する。

(2). どのような実数 $\varepsilon > 0$ に対しても $|x_0 - x'| < \delta$ ならば $|f(x_0) - f(x')| < \varepsilon$ となるような実数 $\delta > 0$ が存在する。

証明. 関数 $y = f(x)$ が x_0 において (1) の意味で連続であるとする。このとき $|x_0 - x'| < \delta$ ならば $|f(x_0) - f(x')| < \varepsilon$ となるような実数 $\delta > 0$ が存在しないと仮定する。するとどんな $\delta > 0$ についても

$$|x_0 - x| < \delta \text{ のとき } |f(x_0) - f(x)| \geq \varepsilon$$

であるような点 x が存在する。δ によってこの x は異なるかもしれない。各自然数 n について $\delta = \frac{1}{n}$ としてこのような x を一つづつ選んで点列 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ を作る（同じものが含まれていてもよい)。各 n について

$$|x_0 - x_n| < \frac{1}{n} \text{ のとき } |f(x_0) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

が成り立っている。n を大きくしていくと $|x_0 - x_n|$ はゼロに収束していくが $|f(x_0) - f(x_n)|$ ははゼロに収束しない。したがって $f(x)$ が (1) の意味で x_0 において連続であるという仮定と矛盾するので，求める $\delta > 0$ が存在しなければならない。

逆に関数 $y = f(x)$ が x_0 において (2) の意味で連続であるとする。X の点列 $x_1,\ x_2,\ \ldots,$ x_n で n が大きくなるとき x_0 に収束するものを一つとり，それに対応した Y の点列 $f(x_1)$,

$f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ が $f(x_0)$ に収束しないと仮定する。するとある $\varepsilon > 0$ についてどんなに大きな番号 N についても

$$n \geq N \text{ のとき } |f(x_0) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

が成り立つような n が存在する。$f(x)$ は (2) の意味で連続であると仮定したからこの ε について適当に $\delta > 0$ を選べば

$$|x_0 - x_n| < \delta \text{ ならば } |f(x_0) - f(x_n)| < \varepsilon$$

が成り立つはずである。一方点列 x_1, x_2, ..., x_n は x_0 に収束するから充分に大きな N について

$$n \geq N \text{ ならば } |x_0 - x_n| < \delta$$

となる。どんなに大きな N についても $n \geq N$ のとき $|f(x_0) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ となる n があるからそのような n について

$$|x_0 - x_n| < \delta \text{ のとき } |f(x_0) - f(x')| \geq \varepsilon$$

であることになり，これは (2) の連続性の定義と矛盾する。したがって $f(x)$ は (1) の意味でも連続である。 ☺

この補題とその証明は次に取り上げる距離空間における関数の連続性についてもそのまま当てはまる（ユークリッドの距離を一般の距離で置き換えればよい）。

$f(x)$ があらゆる $x \in X$ において連続であるとき「X において連続」であると言う。2 次元以上のユークリッド空間における関数についてもユークリッドの距離を用いて同様に連続性が定義される。ここで，たとえば 2 次元ユークリッド空間 X から Y への関数とは，平面上のある点に別の平面上のある点を対応させる関数である。X と Y の次元が異なる場合でも関数は定義できる。X が 3 次元で Y が 1 次元の場合には 3 次元空間内の点に実数を対応させる関数となる。

距離空間における関数の連続性もユークリッド空間における連続性と同様であり次のように表現される。

> 距離空間 X から Y への関数を $f(x)$，X，Y の距離をそれぞれ d_X，d_Y とすると，どのような実数 ε に対しても $d_X(x_0, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x_0), f(x')) < \varepsilon$ となるような実数 δ が存在するとき，$f(x)$ は x_0 において連続である。

やはり $f(x)$ があらゆる $x \in X$ において連続であるとき「X において連続」であると言う。この定義を開球を用いて次のように言い換えることができる。

> どのような実数 ε に対しても $x' \in B_X(x_0, \delta)$ ならば $f(x') \in B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ となるような実数 δ が存在するとき，$f(x)$ は x_0 において連続である。

1.9 位相空間における関数の連続性

位相空間においては関数の連続性は次のように定義される。

定義 1.9 (位相空間における関数の連続性 (continuity)). 位相空間 X から Y への関数を $f:\ X \longrightarrow Y$ とする。あらゆる Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であるとき，f は X において連続であると言う。ここで

$$f^{-1}(V) = \{x \in X:\ f(x) \in V\}$$

であり，f によって V に含まれる点に移される X の点の集合である。$f^{-1}(V)$ を f による V の逆像と呼ぶ。

前節で示した距離空間における関数の連続性の定義が，距離空間を位相空間と見れば上記の定義と一致することを次の補題で示す。

補題 1.9. X，Y を距離空間，$f:\ X \longrightarrow Y$ を X から Y への関数とする。あらゆる Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であるとき，またそのときにのみ f は X において連続である。

証明. f が連続であると仮定しよう。V を Y の開集合とし，$x \in f^{-1}(V)$ であるとする（x は f によって V のある点に対応させられる点である)。$f^{-1}(V)$ が開集合であることを示すには，$B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(V)$ となる δ が存在することを示さなければならない。$f(x)$ が V に属し，V は開集合であるから $B_Y(f(x),\varepsilon) \subset V$ を満たすような ε が存在する。f は連続であるから $x' \in B_X(x,\delta)$ ならば $f(x') \in B_Y(f(x),\varepsilon)$ となるような δ がある。したがって $x' \in B_X(x,\delta)$ であるようなどんな x' についても $f(x') \in V$，すなわち $x' \in f^{-1}(V)$ である。以上によって f が連続ならば，あらゆる Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが示された。

逆に，あらゆる Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であると仮定しよう。x を X の任意の点とし，ある与えられた ε をとる。開球 $B_Y(f(x),\varepsilon)$ は Y において開集合であるから，その逆像 $f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$ は X において開集合であり，かつ x を含んでいる。したがって $B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$ が満たされるような δ が存在する。これは $f(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(f(x),\varepsilon)$ を意味する。以上によって与えられた ε に対して $x \in B_X(x,\delta)$ ならば $f(x) \in B_Y(f(x),\varepsilon)$ となるような実数 δ が存在することが示されたから f は連続である。 ☺

例 1.2. この補題での連続性の定義がごく普通の関数の連続性に対応していることを例によって確かめてみよう。X, Y をともに $\mathbb{R}$ として X から Y への次のような関数 $y = f(x) (x \in X,\ y \in Y)$ を考える。

$$\begin{aligned} &y = x, \quad x < 0 \text{ のとき} \\ &y = 2, \quad x = 0 \text{ のとき} \\ &y = x, \quad 0 < x \text{ のとき} \end{aligned}$$

この関数は明らかに $x = 0$ において不連続な関数である。この関数について開区間 $V = (1,3)$ をとると，$f(x) \in V$ となる x の集合は $(1,3) \cup \{0\}$ であるが，これは開集合ではない。

もう一つ例を考えてみよう。やはり $\mathbb{R}$ における X から Y への次のような関数 $y = g(x) (x \in X,\ y \in Y)$ を考える。

$$\begin{aligned} &y = x, && x < 0 \text{ のとき} \\ &y = x + 2, && 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき} \\ &y = x + 4, && 1 < x \text{ のとき} \end{aligned}$$

この関数は $x = 0$ と $x = 1$ において不連続な関数である。この関数について開区間 $V = (1, 4)$ をとると，$g(x) \in V$ となる x の区間は閉区間 $[0, 1]$ である。

次に合成関数の連続性について考える。

補題 1.10. X, Y, Z を位相空間，$f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ をそれぞれ X から Y，Y から Z への連続関数であるとする。そのとき X から Z への f と g の合成関数 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ は連続である。

証明. V を Z の開集合とすると g は連続であるから $g^{-1}(V)$ は開集合であり，さらに f が連続であるから $f^{-1}(g^{-1}(V))$ も開集合である。ここで $f^{-1}(g^{-1}(V))$ は g によって $V \subset Z$ の点に移されるような Y の点に移される X の点の集合であるから，合成関数 $g \circ f$ によって V の点に移される X の点の集合 $(g \circ f)^{-1}(V)$ であり，それが開集合であるから $(g \circ f)$ は連続である。 ☺

ここまでは関数の連続性を開集合を用いて表してきたが，閉集合を用いても同様に表すことができる。

補題 1.11. X, Y を位相空間，$f\colon X \longrightarrow Y$ を X から Y への関数であるとする。そのとき，あらゆる Y の閉集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の閉集合であるとき，またそのときにのみ f は X において連続である。

証明. $f^{-1}(V)$ が閉集合であるとする。V は Y の部分集合であるから f によって V の点に移される点の集合 $f^{-1}(V)$ の X における補集合は V の点に移されない，したがって V に含まれない Y の点に移される点の集合 $f^{-1}(Y \setminus V)$ に等しい。すなわち

$$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$$

を得る。$f^{-1}(V)$ と V が閉集合ならその補集合である $X \setminus f^{-1}(V)$ と $Y \setminus V$ は開集合であるから，この式は Y の開集合 $Y \setminus V$ の逆像が X の開集合 $X \setminus f^{-1}(V)$ になることを意味し f は連続である。

逆に f が連続であるとすると $Y \setminus V$ が開集合なら $f^{-1}(Y \setminus V)$ も開集合である。上式より V が閉集合なら $f^{-1}(V)$ も閉集合となる。 ☺

有限個の閉集合の和集合として表される集合の関数の連続性について次の結果を示す。

補題 1.12. X，Y を位相空間，$f\colon X \longrightarrow Y$ を X から Y への関数とする。X は閉集合 A_1, A_2, $\dots$, A_k の和集合 $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ で表され，f の各 A_j（$j = 1, 2, \dots, k$）への制限（各 A_j の点で定義された f の部分）が連続であるとする。そのとき f は連続である。

証明. 補題 1.11によって関数 f はあらゆる Y の閉集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が閉集合であるとき連続である。V を Y の閉集合とすると，f の各 A_i への制限が連続であるから，すべての $i = 1, 2, \dots, k$ について $f^{-1}(V) \cap A_i$ は A_i の相対位相において閉集合である。A_i は X の閉集合であるから A_i の部分集合はそれが X の閉集合である場合，またその場合にのみ A_i の閉集合である。したがって $f^{-1}(V) \cap A_i$ は X の閉集合である。$f^{-1}(V)$ は $i = 1, 2, \dots, k$ についての $f^{-1}(V) \cap A_i$ の和集合であるが，有限個の閉集合の和集合は閉集合であるから $f^{-1}(V)$ は閉集合であり，したがって補題 1.11によって f は連続である。 ☺

補題 1.13. f を X から Y への連続関数，$x_1, x_2, x_3, \ldots$ を X の点 p に収束する X の点列であるとする。そのとき点列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ は $f(p)$ に収束する。

証明. V を $f(p)$ を含む Y の開集合とする。f は連続であるから $f^{-1}(V)$ は p を含む X の開集合である。したがって $j \geq N$ に対して $x_j \in f^{-1}(V)$ となるような自然数 N がある。そのとき $j \geq N$ に対して $f(x_j) \in V$ であるから，$f(x_j)$ は $f(p)$ に収束する。 ☺

1.10 同相・同相写像

定義 1.10 (恒等写像，包含写像，定値写像). 位相空間 X から X への連続関数 $f(x)$ で，X の各点 x に x 自身を対応させる関数を恒等写像 (identity map) と呼び id_X と表す（id は identity の略である）。また，$A \subset X$ について，A の各点にその点自身を対応させる A から X への関数を包含写像と呼び i_A で表す（i は inclusion の略）。さらに，すべての X の点をあるただ一つの Y の点に対応させる X から Y への関数を定値写像と言う。

本稿では点から点への写像だけを考えるので「写像」と「関数」を同じ意味で用いる。

定義 1.11 (同相・同相写像 (homeomorphism)). X，Y を位相空間とする。次の条件を満たす X から Y への関数 h を同相写像と呼ぶ。

(1). h は単射かつ全射である。そのとき Y から X への逆関数（逆写像）h^{-1} が存在する。

(2). h も，その逆関数 h^{-1} も連続である。

> 「単射」とはそれぞれの $f(x)$ に対応する x がただ一つだけであることを，全射とはすべての Y の点 $y \in Y$ についてそれに対応する x が存在することを意味する。単射かつ全射ならばすべての $y \in Y$ に対応する x があり，しかも一つの $f(x)$ に対応する x は一つだけであるから X の要素と Y の要素は一対一に対応する。そのとき全単射とも呼ばれる。h が全射でなければ Y の要素全体が対応しないので逆関数は定義できない。また h が単射でなければある $f(x)$ に対応する x が複数あるのでやはり逆関数が定義できない。逆に h が単射かつ全射であればすべての Y の要素に対してただ一つの x を対応させられるので逆関数を定義することができる。

X から Y への同相写像が存在するとき二つの位相空間 X と Y は同相であると言われる。そのとき X と Y は同一の空間と見なしてもよい。h と h^{-1} の合成関数は X の恒等写像である（h によって X, Y の点が一対一に対応させられ，h^{-1} によって逆向きに一対一に対応させられるから元の X に点に対応する)，すなわち $h \circ h^{-1} = id_X$，また h^{-1} と h の合成関数は Y の恒等写像である，すなわち $h^{-1} \circ h = id_Y$。

この同相という関係は次に定義する同値関係である。

定義 1.12 (同値関係 (equivalence relation)). ある集合の要素（x，y，z で代表させる）についてのある関係 R が次の条件を満たすとき同値関係であると言う。

(1). 反射性 (reflexivity)： xRx である。

(2). 対称性 (symmetry)： xRy ならば yRx である。

(3). 推移性 (transitivity)： xRy かつ yRz ならば xRz である。

補題 1.14. 同相という関係は同値関係である。

証明. 位相空間 X について X から X への恒等写像が同相写像となるので反射性が成り立つ（X と X は同相）。ある関数 f が X から Y への同相写像であれば f^{-1} が Y から X への同相写像となるので対称性も成り立つ（X と Y が同相ならば Y と X も同相）。

位相空間 X と Y が同相，Y と Z が同相であれば同相写像 $f\colon\ X \longrightarrow Y$ と $g\colon\ Y \longrightarrow Z$ が存在する。f, g は全単射かつ連続であり，逆写像 f^{-1}, g^{-1} も全単射，連続である。したがって合成写像 $g \circ f$ も全単射，連続，その逆写像 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ も全単射，連続であるから $g \circ f$ が X から Z への同相写像となり X と Z は同相である。以上によって推移性も成り立ち，同相という関係は同値関係であることが示された。 ☺

例 1.3. 円（円周，内部両方含むもの）と三角形（周囲，内部を含む）は同相である。まず大きさの異なる二つの円は明らかに同相である。二つの円の半径の比が $1 : t(t > 1)$ であるとする。二つの円を同心円にして配置し，その中心から外側へ向けて直線を引き，その直線に沿って小さい方の円に属する点を中心から t 倍の位置に移す関数を考え，それを円全体を覆うように一周させると，小さい円全体と大きい円全体との同相写像が得られる。

次に適当な大きさの円を三角形の内部に入れる（内接させてもよい)。円の半径を $r(> 0)$ とする。円の中心から外側へ向けて直線を引き三角形の辺（または頂点）と交わった点と中心との距離を $\lambda(\geq r)$ とする（その点が円と三角形とが接する点であれば距離は r に等しい)。その直線に沿って円に属する点を中心から $\frac{\lambda}{r}$ 倍の位置に移す関数を考えると，これは同相写像になる。同様にして円を一周させれば（直線が三角形の辺と交わる点の位置によっては λ の値は異なるが)，円全体と三角形全体との同相写像が得られる。

例 1.4. 1 次元ユークリッド空間 $X = \mathbb{R}$ と開区間 $Y = (-1, 1)$ は同相である。X から Y への写像として

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},\ x \in X$$

を考えると，これは X から Y への全単射かつ連続な関数である（$f(0) = 0, x \longrightarrow \infty$ のとき $f(x) \longrightarrow 1, x \longrightarrow -\infty$ のとき $f(x) \longrightarrow -1$ である)。

$$y = \frac{x}{1 + |x|}$$

として x について解けば $x \geq 0$（かつ $y \geq 0$）のとき $x = \frac{y}{1-y}$，$x < 0$（かつ $y < 0$）のとき $x = \frac{y}{1+y}$ であるから

$$x = \frac{y}{1 - |y|}$$

となり，f の逆写像として

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

を得る。これも全単射，連続である（$f^{-1}(0) = 0, y \longrightarrow 1$ のとき $f^{-1}(y) \longrightarrow \infty, y \longrightarrow -1$ のとき $f^{-1}(y) \longrightarrow -\infty$)。

1.11　近傍，閉包，内部

はじめに近傍を定義する。

定義 1.13 (近傍 (neighborhood)). X を位相空間，x を X の点，N を x を含む X の部分集合とする。$x \in U$ および $U \subset N$ を満たす開集合 U があるならば，N は x の近傍であると言う。

補題 1.15. X を位相空間とすると，X の部分集合 V が V に含まれるあらゆる点の近傍であるとき，またそのときにのみ X の開集合である。

証明. 近傍と開集合の定義により V が開集合であれば V はそれが含むあらゆる点の近傍である。逆に，V がそれが含むあらゆる点の近傍であると仮定すると，V の任意の点について $v \in U_v, U_v \subset V$ となるような開集合 U_v が存在する。V はこのような U_v の和集合であるから開集合である（V に属する点 v は $v \in U_v$ を満たす U_v に属する。またすべての U_v は V に含まれるからすべての U_v の和集合は V と一致する）。 ☺

次に閉包と内部を定義する。

定義 1.14 (閉包 (closure)・内部 (interior)). (1). X を位相空間，A をその部分集合（部分空間とも言う）とする。A を含む X の閉部分集合全体の共通部分を X における A の閉包と呼び $\bar{A}$ と表す。

(2). X を位相空間，A をその部分集合とする。A に含まれる X の開部分集合全体の和集合を X における A の内部と呼び A^0 と表す。

A の閉包は次のような特徴を持つ。

(1). A の閉包 $\bar{A}$ は A を含む閉集合である。（閉集合の共通部分は閉集合である。）

(2). F を A を含む任意の閉集合とすると F は $\bar{A}$ を含む。（$\bar{A}$ は F と他の閉集合の共通部分に含まれている。）

同様に A の内部は次のような特徴を持つ。

(1). A の内部 A^0 は A に含まれる開集合である。（開集合の和集合は開集合である。）

(2). U を A に含まれる任意の開集合とすると U は A^0 に含まれる。（A^0 は U と他の開集合の和集合になっている。）

補題 1.16. X を位相空間，A をその部分集合とする。A の点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ が X の点 p に収束するとき，p は A の閉包 $\bar{A}$ の点である。

証明. F を A を含む任意の閉集合とするとすべての j について $x_j \in F$ であるから $p \in F$ である（閉集合における点列の極限はその閉集合に属する，補題 1.7）。したがって $p \in \bar{A}$ が得られる。 ☺

これは閉包の需要な性質である。p は A に含まれるとは限らない。たとえば 1 次元ユークリッド空間における開区間 $(0,1)$ の点列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ は 0 に収束するが 0 は $(0,1)$ には含まれない。しかしその閉包 $[0,1]$ には含まれる。

1.12　ユークリッド空間の積空間

X, Y をそれぞれユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ の部分集合であるとする。X, Y の点はそれぞれ m 個, n 個の成分からなる座標（ベクトル）で表される。X のある点の座標と Y のある点の座標とを並べて作られる $m+n$ 個の成分からなる座標で表される点はユークリッド空間 $\mathbb{R}^{m+n}$ の点と見なすことができる。そのような点全体の集合を $X \times Y$ で表し X と Y のデカルト積（Cartesian product，あるいは単に積）と呼ぶ。空間のデカルト積は積空間と呼ばれる。

$X \times Y$ は $\mathbb{R}^{m+n}$ の部分集合である。X, Y の点をそれぞれ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, その座標を

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

とすると $X \times Y$ の点とその座標は

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表される。また $X \times Y$ の 2 点間の距離は次の式を満たす。

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{w}|^2$$

これは距離の定義から導かれる。ここで $\mathbf{v}$ は X の点, $\mathbf{w}$ は Y の点である。

まず積空間における開集合について考えてみよう。

補題 1.17. X, Y をそれぞれ $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。次の条件が成り立つとき，またそのときにのみ $X \times Y$ の部分集合 U は $X \times Y$ において開集合である。

> U の任意の点 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ に対して
>
> $$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y:\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1,\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\} \subset U$$
>
> を満たす $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ が存在する。

証明. ユークリッド空間における開集合の定義により $X \times Y$ の部分集合 U は，U の任意の点 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ について

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y:\ |(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \delta\} \subset U$$

が成り立つような δ が存在するとき $X \times Y$ の開集合である。U のある点を $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ として，この式が成り立つような δ が存在すると仮定する。$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta$ とおくと $\delta_1^2 + \delta_2^2 = \delta^2$ である。したがって $|\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1$, $|\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2$ であれば $|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \delta$ が成り立つ（ユークリッド空間における距離の定義により）。ゆえに $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$ である。

逆に次の式が成り立つような δ_1, δ_2 が存在すると仮定する。

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y:\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1,\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\} \subset U$$

δ_1, δ_2 の内小さい方を δ とおく。$|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \delta$ であれば $|\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1$ かつ $|\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2$ であり，$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$ である。 ☺

次に積空間における関数の連続性について検討する。

補題 1.18. X, Y, Z をそれぞれ $\mathbb{R}^m$，$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^k$ の部分集合とする。次の条件が成り立つとき，またそのときにのみ $X \times Y$ から Z への関数 f は連続である。

> $X \times Y$ の任意の点 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ および任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，$|\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1$，$|\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2$ を満たすすべての $\mathbf{x} \in X$，$\mathbf{y} \in Y$ について $|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \varepsilon$ が成り立つような δ_1, δ_2 が存在する。

証明. f を上の条件を満たす $X \times Y$ から Z への関数とする。U を Z の開集合とし，$f^{-1}(U)$ が $X \times Y$ の開集合であることを示す。

$(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を $f^{-1}(U)$ の点とすると $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ は U の点である。U は Z の開集合であるから

$$\{\mathbf{z} \in Z :\ |\mathbf{z} - f(\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \varepsilon\} \subset U$$

を満たす実数 ε がある。そのとき仮定により，$|\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1$ および $|\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2$ を満たす $\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$ について $|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \varepsilon$，したがって $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$ が成り立つような実数 δ_1, δ_2 が存在する。ゆえに

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y :\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1,\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\} \subset f^{-1}(U)$$

が得られるから，Z の各開集合 U について $f^{-1}(U)$ は $X \times Y$ において開集合であり，関数 $f :\ X \times Y \longrightarrow Z$ は連続である。

逆に $f :\ X \times Y \longrightarrow Z$ は連続であると仮定してみよう。$(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を $X \times Y$ の点とし，実数 $\varepsilon > 0$ をとる。すると

$$\{\mathbf{z} \in Z :\ |\mathbf{z} - f(\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \varepsilon\}$$

は Z の開集合であり，その逆像も $X \times Y$ において開集合である。よって補題 1.17より

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y :\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1,\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\}$$

が $\{\mathbf{z} \in Z :\ |\mathbf{z} - f(\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \varepsilon\}$ の逆像に含まれるような実数 δ_1, δ_2 が存在する。これは $|\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1$，$|\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2$ を満たすすべての $\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$ について $|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{v}, \mathbf{w})| < \varepsilon$ であることを意味する。 ☺

次に積空間の部分集合が開集合となる条件について考えてみよう。

補題 1.19. X, Y をそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の部分集合とする。$X \times Y$ の部分集合 U は次の条件が満たされるとき，またそのときにのみ $X \times Y$ の開集合である。

> 任意の U の点 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ について $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ かつ $V \times W \subset U$ を満たすような X の開集合 V と Y の開集合 W が存在する。

証明. U を $X \times Y$ の開集合とする。そのとき補題 1.17より次の式を満たすような $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ が存在する。

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y :\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1,\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\} \subset U$$

ここで

$$V = \{\mathbf{x} \in X :\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1\},\ W = \{\mathbf{y} \in Y :\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\}$$

とおくと，V は X の開集合，W は Y の開集合であり，$\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$, $V \times W \subset U$ となる。

逆に U が $X \times Y$ の部分集合で U の任意の点 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ について X, Y の開集合 V, W があって $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$ かつ $V \times W \subset U$ が成り立つと仮定する。すると $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ について

$$\{\mathbf{x}:\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1\} \subset V$$

および

$$\{\mathbf{y}:\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\} \subset W$$

となるような $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ が存在する。そのとき

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y:\ |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta_1,\ |\mathbf{y} - \mathbf{w}| < \delta_2\} \subset V \times W \subset U$$

が成り立つ。したがって補題 1.17より U は $X \times Y$ の開集合である。 ☺

1.13　一般の積空間と積位相

集合 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ のデカルト積 (Cartesian product)$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ は $i = 1, 2, \ldots,\ n$ について $x_i \in X_i$ として $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表される点全体の集合である。2 次元，3 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ はそれぞれ $\mathbb{R}$ のデカルト積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に等しい。デカルト積は複数の変数を持つ関数の定義域を表すのによく用いられる。たとえば X, Y, Z を集合として関数 Z の要素が X，Y の要素によって決まるならば $X \times Y$ から Z への関数 $f(x, y):\ X \times Y \longrightarrow Z$ が得られる。X, Y, Z を位相空間として $X \times Y$ から Z への関数の連続性について考えてみよう。そのために X と Y の位相から $X \times Y$ の位相が自然に導かれることを示す。このようにして得られる $X \times Y$ の位相を積位相 (product topology) と言う。

V, W がそれぞれ X, Y の開集合であるとき次のようにして $X \times Y$ の部分集合が開集合であることが定義される。

定義 1.15. X, Y を位相空間とする。$X \times Y$ の部分集合 U は，次の条件を満たすとき（積位相において）$X \times Y$ の開集合であると言われる。

> 任意の $(x, y) \in U$ について X，Y の開集合 V，W で $x \in V$，$y \in W$ かつ $V \times W \subset U$ となるものがある。

集合 $V \times W$ の要素は $v \in V$, $w \in W$ として (v, w) のように表される v と w の対である。なお空集合は $X \times Y$ の開集合と見なされる。

まずこのようにして定義された $X \times Y$ の開集合の組が位相になることを見てみる。位相になるとは位相空間の開集合としての条件を満たすことである。

補題 1.20. X, Y を位相空間とすると，$X \times Y$ の開集合の組は位相である。

証明. 定義によって空集合と全体の集合 $X \times Y$ は $X \times Y$ における開集合である（$X \times Y$ については V, W として X, Y 自身をとればよい）。

E を $X \times Y$ のいくつかの開集合の組全体の和集合（無限個でもよい），(x, y) をその点とする。すると，その組に含まれるある開集合 D について $(x, y) \in D$ である。したがって（上

の定義から）X, Y の開集合 V, W で $x \in V$, $y \in W$ かつ $V \times W \subset D$ を満たすものがある。そのとき $V \times W \subset E$ であるから E は $X \times Y$ の開集合である。

$X \times Y$ の開集合 U_1, U_2, ..., U_m について $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$，$(x, y)$ を U の点とする（(x, y) は U を構成するすべての集合に属している）。するとすべての $k = 1, 2, \ldots, m$ について X, Y の開集合 V_k, W_k で $x \in V_k$, $y \in W_k$ かつ $V_k \times W_k \subset U_k$ を満たすものがある。

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_m,\ W = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_m$$

とおくと $x \in V$, $y \in W$ である (x は各 V_k に, y は各 W_k に属している)。また, $k = 1, 2, \ldots, m$ について $V \times W \subset V_k \times W_k \subset U_k$ であるから $V \times W \subset U$ である。したがって U は $X \times Y$ の開集合である。以上によって $X \times Y$ の開集合は位相であることが示された。 ☺

上のように定義された $X \times Y$ の位相が積位相である。積位相は 2 つ以上任意の有限個の集合のデカルト積に拡張できる。

定義 1.16. X_1, X_2, ..., X_n を位相空間とする。デカルト積 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合 U は次の条件を満たすとき（積位相において）$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の開集合であると言われる。

> 任意の U の点 p について $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ の開集合 V_i で $\{p\} \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subset U$ となるものがある。

やはり空集合は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の開集合と見なされる。

この定義にもとづいて 2 つ以上任意の有限個の集合のデカルト積の位相について考えてみよう。

補題 1.21. X_1, X_2, ..., X_n を位相空間とすると，$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の開集合の組は位相である。

証明. $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ とする。定義によって空集合と X 自身は開集合である（X 自身については V_i として X_i をとればよい)。

E を X のいくつかの開集合の組の和集合，p をその点とする。すると，その組に含まれるある開集合 D について $p \in D$ である。したがって X_i の開集合 $V_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ で

$$\{p\} \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \subset D \subset E$$

を満たすものがある。ゆえに E は X の開集合である。

X の開集合 $U_1, U_2, \ldots, U_m$ について $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$, p を U の点とする (p は U を構成するすべての集合に属している)。すると $k = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$ について X_i の開集合 V_{ki} で $\{p\} \subset V_{k1} \times V_{k2} \times \cdots \times V_{kn} \subset U_k$ を満たすものがある。$V_i = V_{1i} \cap V_{2i} \cap \cdots \cap V_{mi}$ とすると

$$\{p\} \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subset V_{k1} \times V_{k2} \times \cdots \times V_{kn} \subset U_k$$

が $k = 1, 2, \ldots, m$ について成り立つ（$i = 1, 2, \ldots, n$ について V_i はすべての $V_{ki} (k = 1, 2, \ldots, m)$ に含まれる)。したがって $\{p\} \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subset U$ であり，U は開集合となる。以上によって $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の開集合の組が位相であることが示された。 ☺

これを踏まえて2つ以上任意の有限個の集合のデカルト積における関数の連続性について考えよう。

補題 1.22. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ および Z を位相空間とする。そのとき $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ から Z への関数 $f\colon\ X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Z$ は次の条件が満たされるとき，またそのときにのみ連続である。

> 任意の $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の点 p と $f(p)$ を含む任意の Z の開集合 U に関して $i = 1, 2, \ldots, n$ について，$p \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ かつ $f(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) \subset U$ を満たすような X_i の開集合 V_i が存在する。

証明. $i = 1, 2, \ldots, n$ について V_i を X_i の開集合，U を Z の開集合とする。すると $f(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) \subset U$ のとき，またそのときにのみ $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subset f^{-1}(U)$ である（これは f^{-1} の定義から導かれる）。したがって，$f(p) \in U$ を満たす $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の任意の点 p について $f(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) \subset U$ を満たす $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ の開集合 V_i が存在するとき，またそのときにのみ f^{-1} は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の積位相において開集合である。 ☺

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を位相空間，V_i を $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ の開集合とすると積位相の定義から $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の開集合である。

定理 1.23. $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ とする。ここで $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は位相空間であり，X には積位相が与えられている。また各 i について $p_i\colon\ X \longrightarrow X_i$ を $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ を x_i に移す関数とする。

> p_i によってすべての $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が x_i に移される。このような関数を射影関数 (projection function) と呼ぶ。

そのとき，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ は連続であり，また $p_i \circ f\colon\ Z \longrightarrow X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ が連続であるとき，またそのときにのみ $f\colon\ Z \longrightarrow X$ は連続である。

証明. V を X_i の開集合とすると

$$p_i^{-1}(V) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times V \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$$

となるから $p_i^{-1}(V)$ は X において開集合である。したがって $p_i\colon\ X \longrightarrow X_i$ はすべての i について連続である。$f\colon\ Z \longrightarrow X$ が連続であるとすると，各 i について $p_i \circ f\colon\ Z \longrightarrow X_i$ は連続関数の合成関数となり，それ自身連続である。

逆に各 i について $p_i \circ f\colon\ Z \longrightarrow X_i$ が連続であると仮定する。U を X の開集合とするとき $f^{-1}(U)$ が Z の開集合であることを示さなければならない。

z を $f^{-1}(U)$ の点とし，$f(z) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ とする。U は X の開集合であるから $X_1, X_2, \ldots, X_n$ それぞれの開集合 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ですべての i について $u_i \in V_i$ で $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subset U$ を満たすものがある。ここで

$$N_z = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(V_n)$$

とおく。$i = 1, 2, \ldots, n$ について $f_i = p_i \circ f$ である。すべての i について $u_i \in V_i$ であるから $z \in N_z$ である。また各 i について V_i が X_i の開集合で，f_i が連続であるから $f_i^{-1}(V_i)$ は

Z の開集合である。N_z は開集合の有限個の共通部分であるからそれ自身 Z の開集合であり，さらに

$$f(N_z) \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subset U$$

であるから $N_z \subset f^{-1}(U)$ である。$f^{-1}(U)$ はそれに含まれるすべての z についての N_z の和集合に等しいので開集合である（$f^{-1}(U)$ に含まれるすべての z について $N_z \subset f^{-1}(U)$ である）。したがって $f\colon\ Z \longrightarrow X$ は連続である。 ☺

次の補題では n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の位相と n 個の $\mathbb{R}$ のデカルト積の位相との関係を考える。

補題 1.24. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のユークリッドの距離による位相は $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}$ のデカルト積と見なしたときの位相と一致する。

証明. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 U が $\mathbb{R}$ のデカルト積における積位相において開集合であるとき，またそのときにのみ（ユークリッドの距離による位相において）$\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示さなければならない。

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\mathbf{u} \in U$ とする。すると

$$B(\mathbf{u}, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ |\mathbf{x} - \mathbf{u}| < \delta\}$$

について $B(\mathbf{u}, \delta) \subset U$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在する。I_1, I_2, $\ldots$, I_n を次の式で定義される $\mathbb{R}$ における開区間とする。

$$I_i = \{t \in \mathbb{R}\colon\ u_i - \frac{\delta}{\sqrt{n}} < t < u_i + \frac{\delta}{\sqrt{n}}\}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

I_1, I_2, $\ldots$, I_n は $\mathbb{R}$ の開集合である。さらにすべての $\mathbf{x} \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ について

$$|\mathbf{x} - \mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - u_i)^2 < n \left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^2 = \delta^2$$

であるから

$$\{\mathbf{u}\} \subset I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset B(\mathbf{u}, \delta) \subset U$$

が成り立つ。したがって $\mathbb{R}^n$ のユークリッドの距離による位相における任意の開集合 U は n 個の $\mathbb{R}$ のデカルト積としての $\mathbb{R}^n$ における位相においても開集合である。

逆に U をデカルト積としての $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$\mathbf{u} \in U$ とする。そのとき各 $i(i = 1, 2, \ldots, n$ について $u_i \in V_i$ であり，かつ $V_1 \times V_2 \times \cdots V_n \subset U$ を満たす $\mathbb{R}$ の開集合 V_1, V_2, $\ldots$, V_n が存在する。したがって各 i について $(u_i - \delta_i, u_i + \delta_i) \subset V_i$ となるような $\delta_i > 0$ がある。δ をそのような δ_i の内の最小のものとすると $\mathbf{x} \in B(\mathbf{u}, \delta)$ であれば（$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$）すべての i について $|x_i - u_i| < \delta$ であるから

$$B(\mathbf{u}, \delta) \subset V_1 \times V_2 \times \cdots V_n \subset U$$

を得る。以上によって n 個の $\mathbb{R}$ のデカルト積としての $\mathbb{R}^n$ の位相における開集合 U は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドの距離による位相においても開集合である。 ☺

次の結果は定理 1.23，補題 1.24から導かれる。

系 1.25. X を位相空間，$f\colon\ X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を X から $\mathbb{R}^n$ への関数とし，すべての $x \in X$ について

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

と書き表す。f の成分 f_1, f_2, ..., f_n はそれぞれ X から $\mathbb{R}$ への関数である。そのとき f は各成分 f_1, f_2, ..., f_n が連続のとき，またそのときにのみ連続である。

X を位相空間として f, g が X から $\mathbb{R}$ への連続関数であるとき，$f+g$, $f-g$, $f\cdot g$（合成関数ではなく f の値と g の値の積）は連続である。まず $s(x,y) = x+y$, $p(x,y) = xy$ で定義される実数の和と積，$s\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ は明らかに連続である。また $h(x) = (f(x), g(x))$ で定義される関数 $h\colon\ X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ によって $f+g = s\circ h$, $f\cdot g = p\circ h$ と表される。さらに，系 1.25より h は連続である。連続関数の合成関数は連続であるから $f+g$, $f\cdot g$ が連続であることがわかる。また $-g$ は連続であるから $f-g = f+(-g)$ も連続である。

最後にハウスドルフ空間のデカルト積がハウスドルフ空間であることを見ておこう。

補題 1.26. ハウスドルフ空間 X_1, X_2, ..., X_n のデカルト積 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ はハウスドルフ空間である。

証明. $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ とし，$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を X の異なる 2 点とする。すると 1 から n までの少なくともある一つの番号 i について $x_i \neq y_i$ となっている。そのとき各 X_i はハウスドルフ空間であるから X_i の開集合 U, V で $x_i \in U$, $y_i \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものがある。$p_i\colon\ X \longrightarrow X_i$ を射影関数とすると，p_i は連続であるから $p_i^{-1}(U)$, $p_i^{-1}(V)$ は X の開集合である。さらに $x_i \in U$, $y_i \in V$ であるから $u \in p_i^{-1}(U)$, $v \in p_i^{-1}(V)$ かつ $p_i^{-1}(U) \cap p_i^{-1}(V) = \emptyset$ となる（すなわち $u \in U'$, $v \in V'$ かつ $U' \cap V' = \emptyset$ となるような開集合 U', V' がある。$U \cap V = \emptyset$ であるから $p_i^{-1}(U) \cap p_i^{-1}(V) = \emptyset$ である）ので X はハウスドルフ空間である。 ☺

1.14　コンパクト空間

X を位相空間，A をその部分集合とする。X の部分集合の組があり，A のあらゆる点がその部分集合の少なくとも一つに属しているとき，その部分集合の組が A を被覆する (cover) と言う。特にその部分集合がすべて開集合である場合，部分集合の組を開被覆と呼ぶ。

$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ がある位相空間 X の開被覆であるとき，$\mathcal{V}$ に含まれる集合がすべて $\mathcal{U}$ に含まれているならば，$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の部分被覆であると言う。ここで「コンパクト空間」を定義する。

定義 1.17 (コンパクト空間 (compact space)). 位相空間 X のすべての開被覆が有限個の集合からなる部分被覆（有限部分被覆）を持つとき X はコンパクト空間であると言う。

「有限個の集合からなる部分被覆」とは有限個の開集合の組で X を被覆することを意味する。この定義は X が常に有限部分被覆を持つということを言っているのではなく，無限個の開集合で X を被ったつもりでも実は有限個の開集合で被われている，あるいは同じことであるが，無限個の集合の組でなければ X を被えないような開被覆はないということを意味している。いささかわかりにくいがユークリッド空間の場合にはもっとわかりやすい話になる。

相対位相を持つ位相空間のコンパクト性について次の結果を得る。

補題 1.27. X を位相空間とする。X の部分集合 A は次の条件が満たされるとき，またそのときにのみ A の相対位相においてコンパクトである。

> A を被覆する X の開集合のいかなる組 $\mathcal{U}$ についても，$A \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ となるような $\mathcal{U}$ に含まれる有限個の集合の組 $V_1, V_2, \cdots, V_r$ がある。

証明. A の部分集合 B は X のある開集合 V によって $V \cap A$ と表されるとき，またそのときにのみ A の開集合である。したがって $A \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ となっていれば A は $V_1 \cap A$, $V_2 \cap A, \ldots, V_r \cap A$ によって被覆され，またそうなっていなければ被覆されない。 ☺

次に 1 次元ユークリッド空間における閉じた区間のコンパクト性について考えてみるが，その前に次の定理の証明に必要となる実数の性質を見ておこう。

定義 1.18 (実数の集合の上界 (upper bound)・下界 (lower bound)). D を実数の集合（すなわち $\mathbb{R}$ の部分集合）とする。ある実数 u がすべての $x \in D$ に対して $x \leq u$ を満たすとき D の上界と呼ぶ。そのような上界が存在する場合，D は上に有界 (bounded above) であると言う。また，ある実数 l がすべての $x \in D$ に対して $x \geq l$ を満たすとき D の下界と呼ぶ。そのような下界が存在する場合，D は下に有界 (bounded below) であると言う。

u，l は一つだけではなく条件を満たす実数がすべて上界，下界である。

定義 1.19 (実数の集合の上限 (supremum)・下限 (infimum)). D を上に有界な実数の集合とする。ある実数 s が D の上界であって，かつすべての D の上界 u に対して $s \leq u$ を満たすとき，D の上限と呼び，$\sup D$ と表す。上限は最小の上界である。

D を下に有界な実数の集合とする。ある実数 t が D の下界であって，かつすべての D の下界 l に対して $t \geq l$ を満たすとき，D の下限と呼び，$\inf D$ と表す。下限は最大の下界である。

上限，下限自身が D に属するとは限らない。もし上限が D に属せばそれは D の最大値であり，下限が D に属せばそれは D の最小値である。逆に上限が D に属さないときには D に最大値は存在せず，下限が D に属さないときには D に最小値は存在しない。

ここで次の公理を提示する。

上限の公理 上に有界で空集合ではない実数の集合には上限が存在する。

下限の公理 下に有界で空集合ではない実数の集合には下限が存在する。

これらは公理であるから成り立つものとして話を進めて行けばよいのだが，次の公理から導くこともできる。

Dedekind の連続性公理 D, E が実数（$\mathbb{R}$）の部分集合で

> (1). $\mathbb{R} = D \cup E,\ D \cap E, = \emptyset\ D \neq \emptyset,\ E \neq \emptyset$
>
> (2). $x \in D,\ y \in E$ ならば $x < y$ である
>
> を満たすならば，D が最大値を持つか，E が最小値を持つか，いずれかただ一つが成り立つ。このような実数の分け方を切断と呼ぶ。

これは実数を二つの部分に分けたとき，その切れ目も実数であってどちらかの部分に属しているということであり，実数の集合がつながっているということを意味するものである

有理数の集合はつながっていない。たとえば $\sqrt{2}$ より小さくない有理数と大きくない有理数に分けると $\sqrt{2}$ 自身は有理数ではなくどちらの組にも含まれないので，それぞれの組に最大値あるいは最小値はない。

この公理から上の二つの公理が導かれることを確認しておこう。

実数の集合 S が上に有界であると仮定する。このとき実数全体 $\mathbb{R}$ を次の二つの組に分ける。

$$A = \{S \text{ の上界でない数の全体}\},\ B = \{S \text{ の上界の全体}\}$$

これら以外に S に属する実数はなく，A に属する数は B に属する数より小さいのでこの分け方は実数の切断になっている。したがって連続性公理によって A に最大値があるか B に最小値がある。A に最大値があると仮定してその最大値を α とすると，それは S の上界ではないから S に $\alpha < s$ となるような s がある。そこで $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + s)$ とおけば $\alpha < \beta < s$ であるから β は S の上界ではない。したがって β は A に属さなければならいないがこれは α が A の最大値であることと矛盾する。よって B に最小値が存在し，それが上限となる。

下限についても同様にして証明できる。実数の集合 S が下に有界であると仮定し，実数全体 $\mathbb{R}$ を次の二つの組に分ける。

$$A = \{S \text{ の下界でない数の全体}\},\ B = \{S \text{ の下界の全体}\}$$

これら以外に S に属する実数はなく，A に属する数は B に属する数より大きいのでこの分け方は実数の切断になっている。したがって連続性公理によって A に最小値があるか B に最大値がある。A に最小値があると仮定してその最小値を α とすると，それは S の下界ではないから S に $s < \alpha$ となるような s がある。そこで $\beta = \frac{1}{2}(s + \alpha)$ とおけば $s < \beta < \alpha$ であるから β は S の下界ではない。したがって β は A に属さなければならいないがこれは α が A の最小値であることと矛盾する。よって B に最大値が存在し，それが下限となる。

定理 1.28 (ハイネ・ボレル (Heine-Borel) の定理). a，b を $a < b$ であるような実数とするとき，閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである。

証明. $\mathcal{U}$ を $[a, b]$ の各点がその中の少なくとも一つの開集合に含まれているような $\mathbb{R}$ の開集合の組であるとする。以下では $[a, b]$ が有限個のそのような開集合で被覆されることを示す。

S を $[a, \tau]$ が $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合で被覆されるような区間となる $\tau \in [a, b]$ の集合とし，$s = \sup S$ とする。s は $\mathcal{U}$ のある集合 W に属している ($s \in W$)。W は $\mathbb{R}$ の開集合であるから $(s - \delta, s + \delta) \subset W$ を満たす $\delta > 0$ が存在する。さらに $s - \delta$ は S の上限ではないから $\tau > s - \delta$ を満たす $\tau \in S$ が存在する。したがって S の定義により，$[a, \tau]$ は $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合の組 $V_1, V_2, \ldots, V_r$ によって被覆される。

$t \in [a, b]$ を $\tau \le t < s + \delta$ を満たすようにとる。すると

$$[a, t] \subset [a, \tau] \cup (s - \delta, s + \delta) \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r \cup W$$

が成り立つから，$[a, t]$ は有限個の開集合で被覆され $t \in S$ である。特に $s \in S$ であり，さらに $s = b$ である。なぜならばそうでなければ s は S の上界とはならない（$s < b$ であれば，$s - \delta < t < s + \delta$ を満たす t が S に属する。しかし，たとえば $t = s + \frac{1}{2}\delta$ とすると $t > s$ となり s が S の上界とはならない)。したがって $b \in S$ であり $[a, b]$ は $\mathcal{U}$ に属する有限個の間集合の組によって被覆される。 ☺

このように閉区間はコンパクトであるが，開区間はコンパクトではない。開区間 $(-1,1)$ を考えてみよう。開区間の組 $(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})(n=2,3,\dots)$ をとると $(-1,1)$ はこの開区間の無限個の組によって被覆される（$(-1,1)$ に属するいかなる点もいずれかの $(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})$ に属する)。しかし，どうのように有限個の $(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})$ をとっても $(-1,1)$ を被覆することはできず，$(-1,1)$ はコンパクトではない。

次にコンパクトな位相空間の閉部分集合（閉集合であるような部分集合）もコンパクトであることを示す。

補題 1.29. A をあるコンパクトな位相空間 X の閉部分集合であるとすると，A はコンパクトである。

証明. $\mathcal{U}$ を A を被覆する X の開集合の組であるとする。$\mathcal{U}$ に開集合 $X\setminus A$ を付け加えると X を被覆する開被覆を得る（$\mathcal{U}$ に属する開集合の和集合は A を含む。したがってそれと $X\setminus A$ との和集合は X を含む)。X はコンパクトであるからこの開被覆には有限の部分被覆がある。さらに A は，この有限部分被覆に属する $\mathcal{U}$ の集合の組に属する開集合によって被覆される。したがって補題 1.27により A はコンパクトである。 ☺

次にコンパクトな集合の点から連続関数によって移される点の集合もまたコンパクトであることを示す。

補題 1.30. f を位相空間 X から Y への連続関数，A を X のコンパクトな部分集合とする。そのとき $f(A)$ は Y のコンパクトな部分集合である（$f(A)$ は関数 f によって A の点から移される点全体の集合)。

証明. $\mathcal{V}$ を $f(A)$ を被覆する Y の開集合の組であるとすると，A は $V\in\mathcal{V}$ に対する $f^{-1}(V)$ という形の開集合全体によって被覆される。つまりそのような $f^{-1}(V)$ の組は A の開被覆である。A はコンパクトであるから有限部分被覆，すなわち $\mathcal{V}$ に属する有限個の集合 $V_1,V_2,\dots,V_k$ で次の条件を満たすものがある。

$$A\subset f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2)\cup\cdots\cup f^{-1}(V_k)$$

そうすると $f(A)\subset V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k$ が成り立ち $f(A)$ はコンパクトである ☺

> $f(A)$ の任意の点は f によって A のある点から移されるが，A の点はすべて $f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2)\cup\cdots\cup f^{-1}(V_k)$ に含まれている。つまり，$f(A)$ の点はいずれかの $f^{-1}(V_i)$（$i=1,2,\dots,k$）の点から f によって移されたものであるので，$V_1,V_2,\dots,V_k$ の少なくとも一つに含まれているのである。

次にコンパクトな位相空間上の実数値関数（$\mathbb{R}$ への関数）は上にも下にも有界であることを示す。

補題 1.31. f をコンパクトな位相空間 X から 1 次元ユークリッド空間（実数の空間）$\mathbb{R}$ への連続関数とする。そのとき f は X において上，下に有界である。

証明. 補題 1.30より $f(X)$ の値域はコンパクトである。$\mathbb{R}$ はある自然数 $m\in\mathbb{N}$ によって $(-m,m)$ の形に表される開区間の組によって被覆される（m を 1 から順にとり，無限個の開区間の和集合を考えればよい)。

無限個の和集合を考えると言っても m が無限大という数になり得ると考えるわけではない。$\mathbb{R}$ に属する（その絶対値が）いかに大きな実数も m を充分に，つまりその数より大きくとれば $(-m, m)$ の和集合に含まれるということである。

その部分集合である $f(X)$ の値域もそのような開区間の組によって被覆されるが，コンパクト性によって有限個のそのような区間 $I_1, I_2, \dots, I_k$ によって被覆される。したがって M を $(-M, M)$ が $I_1, I_2, \dots, I_k$ の中で最大の区間となるようにとれば $f(X) \subset (-M, M)$ となる。ゆえに f は上にも下にも有界である。 ☺

これを踏まえてコンパクトな位相空間上の実数値関数には最大値，最小値が存在することを示す。

補題 1.32. f をコンパクトな位相空間 X から $\mathbb{R}$ への連続関数とする。そのときすべての $x \in X$ について $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ となるような X の点 u, v がある。

証明. $m = \inf\{f(x) :\ x \in X\}$, $M = \sup\{f(x) :\ x \in X\}$ とする（$m = \inf\{f(x) :\ x \in X\}$ はすべての $x \in X$ について $m \leq f(x)$ を満たす最大の実数で下限，また $M = \sup\{f(x) : x \in X\}$ はすべての $x \in X$ について $M \geq f(x)$ を満たす最小の実数で上限である。m，M 自身が $f(x)$ の値であるとは限らないので最大値，最小値とは意味が異なる。最大値，最小値は X に含まれる x についての $f(x)$ の値でなければならない。）もしすべての $x \in X$ について $f(x) < M$ であるとすると，$x \in X$ について $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ となるような関数を考えれば，連続でかつ上に有界ではない（$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ は $y = f(x)$ と $z = \frac{1}{M - y}$ の合成関数であり，それぞれは連続である。また M は $f(x)$ の上限であるからいくらでも M に近い $f(x)$ の値がある。もしある $M' < M$ について $f(x) \leq M'$ であれば M は上限ではない。）。しかしこれは補題 1.31に矛盾する。したがって $f(v) = M$ となる $v \in X$ がある。同様に，すべての $x \in X$ について $f(x) > m$ であるとすると，$x \in X$ について $h(x) = \frac{1}{f(x) - m}$ となるような関数を考えれば，連続でかつ上に有界ではない（m は $f(x)$ の下限なのでいくらでも m に近い $f(x)$ の値がある。もしある $m' > m$ について $f(x) \geq m'$ であれば m は下限ではない。）。したがって $f(u) = m$ となる $u \in X$ がある。m と M の定義から $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ である。 ☺

この補題は非常に重要なものであり，経済学においてもよく用いられている。

次に距離空間におけるコンパクトな部分集合が閉集合であることを示す（距離空間のコンパクト性については後でより詳しく検討する）。

補題 1.33. A を距離空間 X のコンパクトな部分集合とすると A は閉集合である。

証明. p を A に含まれない X の点，d を X の距離関数として $f(x) = d(x, p)$ とする。A はコンパクトであるから補題 1.32よりすべての $a \in A$ について $f(a) \geq f(q)$ となるような点 $q \in A$ がある（q は p に最も近い A の点である。）。$q \neq p$ であるから $f(q) > 0$ である。δ を $0 < \delta \leq f(q)$ を満たす実数とすると p を中心とする半径 δ の開球は A の補集合に含まれる（この開球のすべての点 x について $f(x) < f(q)$ であるから）。したがって，A の補集合は X の開集合となり A は閉集合である。 ☺

次にハウスドルフ位相空間のコンパクトな部分集合とその補集合に含まれる点とが適当な開集合によって分けられることを示す。

補題 1.34. X をハウスドルフ位相空間，K を X のコンパクトな部分集合とする。x を $X \setminus K$ の点とすると $x \in V$, $K \subset W$, $V \cap W = \emptyset$ を満たすような X の開集合 V, W がある。

証明. X はハウスドルフ空間であるから各 $y \in K$ に対して $x \in V_{x,y}, y \in W_{x,y}, V_{x,y} \cap W_{x,y} = \emptyset$ を満たすような開集合 $V_{x,y}$, $W_{x,y}$ が存在する。そのとき，K はコンパクトであるから K が $W_{x,y_1} \cup W_{x,y_2} \cup \cdots \cup W_{x,y_r}$ に含まれるような有限集合 $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ がある（K に含まれるすべての $y \in K$ に対する $W_{x,y}$ の和集合に K は含まれるからその和集合は K の開被覆となる。K のコンパクト性によって部分被覆が存在する）。

$$V = V_{x,y_1} \cap V_{x,y_2} \cap \cdots \cap V_{x,y_r},\ W = W_{x,y_1} \cup W_{x,y_2} \cup \cdots \cup W_{x,y_r}$$

と定義すると，V, W は開集合であり，$x \in V$, $K \subset W$ かつ $V \cap W = \emptyset$ である（$V_{x,y_1} \cap V_{x,y_2} \cap \cdots \cap V_{x,y_r}$ に含まれる点はすべての $V_{x,y_i} (i = 1, 2, \dots, r)$ に含まれているから，W_{x,y_1}, W_{x,y_2}, …, W_{x,y_r} のいずれにも含まれず，したがって $W = W_{x,y_1} \cup W_{x,y_2} \cup \cdots \cup W_{x,y_r}$ に含まれない）。 ☺

これを踏まえてハウスドルフ位相空間のコンパクトな部分集合が閉集合であることを示す。

系 1.35. ハウスドルフ位相空間のコンパクトな部分集合は閉集合である。

証明. K をハウスドルフ位相空間 X のコンパクトな部分集合とする。補題 1.34より各 $x \in X \setminus K$ に対して $x \in V_x$, $V_x \cap K = \emptyset$ となるような開集合 V_x が存在する。そのとき $X \setminus K$ はそれに含まれるすべての x についての開集合 V_x の和集合に等しいからそれ自身開集合である（$V_x \cap K = \emptyset$ なので K の点は V_x の和集合には含まれず，一方 $X \setminus K$ の点はすべてが含まれる）。$X \setminus K$ が開集合であるから K は閉集合である。 ☺

次に，ハウスドルフ位相空間の共通部分を持たない二つのコンパクトな部分集合はそれぞれを含む開集合によって分けられることを示す。

補題 1.36. X をハウスドルフ位相空間，K_1, K_2（$K_1 \cap K_2 = \emptyset$）を X のコンパクトな部分集合とする。そのとき，$K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすような開集合 U_1, U_2 が存在する。

証明. 補題 1.34より各 $x \in K_1$ について $x \in V_x$, $K_2 \subset W_x$, $V_x \cap W_x = \emptyset$ となるような開集合 V_x, W_x が存在する。そのとき，K_1 がコンパクトであるから

$$K_1 \subset V_{x_1} \cup V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_r}$$

となるような K_1 の有限個の点の集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ が存在する。

$$U_1 = V_{x_1} \cup V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_r},\ U_2 = W_{x_1} \cap W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_r}$$

と定義すると U_1, U_2 は開集合であり，$K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ が成り立つ（$W_{x_1} \cap W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_r}$ に含まれる点はすべての $W_{x_i} (i = 1, 2, \dots, r)$ に含まれているから，V_{x_1}, V_{x_2}, …, V_{x_r} のいずれにも含まれず，したがって $V_{x_1} \cup V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_r}$ に含まれない）。 ☺

ここまでに得られた結果をもとに，コンパクト位相空間からハウスドルフ空間への連続関数において，そのコンパクト位相空間の閉部分集合に含まれる点から移される点の集合が閉集合であることを示す。

補題 1.37. $f\colon X \longrightarrow Y$ をコンパクト位相空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続関数とする。そのとき X の任意の閉集合 K に対して $f(K)$ は Y の閉集合である。

証明. 補題 1.29により K が X の閉集合であればコンパクトであるから，補題 1.30によって $f(K)$ はコンパクトである。一方系 1.35によりハウスドルフ空間のコンパクトな部分集合は閉集合であるから $f(K)$ は Y の閉集合である。 ☺

次にコンパクト位相空間からハウスドルフ空間への連続な全単射が同相写像であることを示す。

定理 1.38. コンパクト位相空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続な全単射を f とすると，f は同相写像である。

証明. $g\colon Y \longrightarrow X$ を全単射 $f\colon X \longrightarrow Y$ の逆写像とする。これが連続であることを示せばよい。U が X の開集合であれば $X \setminus U$ は閉集合であるから補題 1.37により $f(X \setminus U)$ は Y の閉集合である。f は全単射であるから

$$f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U) = Y \setminus g^{-1}(U)$$

が得られる。したがって任意の開集合 U について $g^{-1}(U)$ は Y において開集合である（$g^{-1}(U)$ の Y における補集合 $Y \setminus g^{-1}(U)$ が閉集合であるから）。ゆえに $g\colon Y \longrightarrow X$ は連続であり，f は同相写像となる。 ☺

定理 1.40において有限個のコンパクト空間のデカルト積がコンパクトであることを示すが，そのために次の補題を必要とする。

補題 1.39. X, Y を位相空間，K を Y のコンパクトな部分集合，U を $X \times Y$ の開集合とする。$V = \{x \in X\colon \{x\} \times K \subset U\}$ とすると V は X の開集合である。

証明. $x \in V$ とする。U が開集合であるから，各 $y \in K$ について $(x, y) \in D_y \times E_y$, $D_y \times E_y \subset U$ を満たす X, Y の開集合 D_y, E_y が存在する。K はコンパクトなので $K \subset E_{y_1} \cup E_{y_2} \cup \cdots \cup E_{y_k}$ なるような有限個の y の集合 $y_1, y_2, \dots, y_k$ がある。$N_x = D_{y_1} \cap D_{y_2} \cap \cdots \cap D_{y_k}$ とすると N_x は X の開集合であり，さらに

$$N_x \times K \subset \bigcup_{i=1}^{k} (N_x \times E_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (D_{y_i} \times E_{y_i}) \subset U$$

となるから $N_x \subset V$ が得られる（$N_x \times K \subset U$ であるから，すべての $x \in N_x$ について $x \in V$ である）。各 $x \in V$ は N_x に含まれ，その N_x は V に含まれるから V は N_x 全体の和集合に一致する。したがって V は X の開集合である。 ☺

定理 1.40. 有限個のコンパクト空間のデカルト積はコンパクトである。

証明. 二つのコンパクトな位相空間 X，Y の積がコンパクトであることを示せば，一般的な結論は帰納的に導かれる（$X \times Y$ がコンパクトならそれと Z の積 $X \times Y \times Z$ もコンパクトである。以下同様）。$\mathcal{U}$ を $X \times Y$ の開被覆とする。これが有限個の部分被覆を持つことを示さなければならない。

x を X の点とすると。$\{x\} \times Y$ はコンパクト空間 Y から $X \times Y$ への連続関数（$y \in Y$ を (x, y) へ移す関数）による像であり，コンパクト集合の連続関数による像（関数によって移された点の集合）はコンパクトであるから（補題1.30），$X \times Y$ のコンパクトな部分集合である。したがって，開被覆 $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合の組 $U_1, U_2, \dots, U_r$ で $\{x\} \times Y$ が $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r$ に含まれるようなものがある。X の点 x' について $\{x'\} \times Y$ が $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r$ に含まれるようなすべての点の集合を V_x とすると，$x \in V_x$ であり補題1.39によって V_x は開集合である。そのとき $V_x \times Y$ も $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合 $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r$ によって被覆される。

すべての $x \in X$ についての V_x の組 $\{V_x : x \in X\}$ は X の開被覆である（x によって V_x は異なるかもしれない）。X はコンパクトであるから，$X = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_r}$ となるような有限個の点の組 $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ がある（各 V_x は X に含まれているから $V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_r}$ と X が一致する。)。$X \times Y$ は $j = 1, 2, \dots, r$ についての $V_{x_j} \times Y$ の和集合であり，各々の集合は $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合の組によって被覆されている。したがって全体として $X \times Y$ は $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合の組によって被覆されるからコンパクトである（各 V_x が有限個の開集合の組によって被覆され，X は有限個の V_x によって被覆される）。 ☺

ここで距離空間における集合の有界性を定義する。

定義 1.20 (有界 (bounded)). X を距離空間，d をその距離関数とする。X の部分集合 A が次の条件を満たすとき有界であると言う。

> すべての $x, y \in A$ について $d(x, y) \leq K$ となるような負でない実数 K が存在する。

この条件を満たす最小の実数を A の直径 (diameter) と呼び $\mathrm{diam} A$ と表す。

$\mathrm{diam} A$ は A に属するすべての x, y についての $d(x, y)$ の上限である。この有界性の定義は当然ユークリッド空間にも当てはまる。

ここでユークリッド空間におけるコンパクト性に関する次の定理を示す。

定理 1.41. K を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とすると，K は閉集合かつ有界であるとき，またそのときにのみコンパクトである。

証明. K がコンパクトであると仮定する。すると $\mathbb{R}^n$ はハウスドルフ空間であり，系1.35によりハウスドルフ空間のコンパクトな部分集合は閉集合であるから K は閉集合である。各自然数 m について B_m を原点を中心とする半径 m の開球，すなわち $B_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < m\}$ であるとする（$|\mathbf{x}|$ は $\mathbf{x}$ と原点との距離，あるいはベクトル $\mathbf{x}$ の大きさである。ノルムと呼ばれることもある），開球の組 $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆となる。K がコンパクトであるから $K \subset B_{m_1} \cup B_{m_1} \cup \cdots \cup B_{m_k}$ となるような自然数 $m_1, m_2, \dots, m_k$ がある。そのとき B_m の定義から M を $m_1, m_2, \dots, m_k$ の最大値として $K \subset B_M$ となる。したがって K は有界である。

逆に K は有界な閉集合であると仮定しよう。そのとき K が次の式で定義される閉集合 C に含まれるような実数 L が存在する。

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ -L \le x_j \le L,\ \ j = 1, 2, \dots, n\}$$

ハイネ・ボレルの定理（定理 1.28）により閉区間 $[-L, L]$ はコンパクトであり，また上の C は $[-L, L]$ の n 個のデカルト積である。したがって定理 1.40により C もコンパクトである。K は C の閉部分集合であり，コンパクトな位相空間の閉部分集合はコンパクトであるから（補題 1.29）K はコンパクトである。 ☺

これも重要な定理である。これを使えばユークリッド空間におけるコンパクト性は，「有界閉集合」と極めてわかりやすい形になる。

1.15　コンパクトな距離空間

X を距離空間，d をその距離関数，A を X の部分集合とすると，A の閉包 $\bar{A}$ は A を含む X のすべての閉集合の共通部分であるが，それは A を含む最小の（最も小さい直径を持つ）閉集合であるとも言える。x を A の閉包 $\bar{A}$ の点としよう。任意の $\varepsilon > 0$ について $d(x, x') < \varepsilon$ を満たす A の点 x' がある。これは x を中心とする半径 ε の開球が A と交わる（共通の点を持つ）ことと同じ意味である。もしそうでなければ，すなわちこの開球が A と共通の部分を持たなければ，その補集合は A を含み x を含まない X の閉集合になる。これは x が A の閉包，つまり A を含むすべての閉集合の共通部分に属するということと矛盾する。したがって $\bar{A}$ の任意の点と A のある点との距離はいくらでも小さくなるので $\bar{A}$ は A を含む最小の閉集合である。

距離空間の部分集合とその閉包の関係について次の結果を得る。

補題 1.42. X を距離空間, A をその部分集合とする。そのとき $\bar{A}$ を A の閉包とすれば $\mathrm{diam} A = \mathrm{diam} \bar{A}$ である。

証明. $\bar{A}$ は A を含むので $\mathrm{diam} A \le \mathrm{diam} \bar{A}$ である。x, y を $\bar{A}$ の点とすると，任意の ε について $d(x, x') < \varepsilon$, $d(y, y') < \varepsilon$ を満たす A の点 x', y' がある。距離の三角不等式より

$$d(x, y) \le d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < \mathrm{diam} A + 2\varepsilon$$

が得られる。したがってあらゆる $\varepsilon > 0$ について $d(x, y) < \mathrm{diam} A + 2\varepsilon$ であるから $d(x, y) \le \mathrm{diam} A$ が得られる（もし $d(x, y) > \mathrm{diam} A$ であれば充分に小さい $\varepsilon > 0$（$\varepsilon < \frac{1}{2}[d(x, y) - \mathrm{diam} A]$ となるような）について $d(x, y) > \mathrm{diam} A + 2\varepsilon$ となってしまう）。ゆえに $\mathrm{diam} \bar{A} \le \mathrm{diam} A$ となり，$\mathrm{diam} A \le \mathrm{diam} \bar{A}$ と合わせて $\mathrm{diam} A = \mathrm{diam} \bar{A}$ が得られる。 ☺

距離空間については位相空間としてのコンパクト性と同値ではあるが別の形でコンパクト性の特徴づけができる。まず次の結果を示す。

補題 1.43. コンパクトな距離空間におけるすべての点列は収束する部分列を持つ（部分列とは（無限個の）点列から（無限個のものを）順序を変えず選んで並べたものである）。

証明. X をコンパクトな距離空間，$x_1, x_2, x_3, \dots$ をその点列とする。また F_n で $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ の閉包を表す（$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ の閉包とは $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ に含まれるすべての点を含む閉集合の共通部分あるいは最も小さい閉集合である）。まず F_1, F_2, F_3, … の共通部分が空集合ではないことを示す。それが空集合であると仮定してみよう。$V_n = X \setminus F_n$ すなわち各 F_n の補集合を V_n とすると，X は集合 $V_1, V_2, V_3, \dots$ の和集合に等しい。

> たとえば V_1 と V_2 の和集合 $V_1 \cup V_2$ は F_1 と F_2 の両方には含まれない要素の集合 $X \setminus (F_1 \cap F_2)$ であるから，すべての V_n の和集合は F_1, F_2, F_3, … のすべてには含まれない要素の集合である。F_1, F_2, F_3, … の共通部分が空集合であればそれらのすべてに含まれる要素はないので V_n の和集合は X に等しい。

各 V_n は開集合であるから $V_1, V_2, V_3, \dots$ は V の開被覆となり，X はコンパクトであるから有限個の V_n によって被覆される。一方 $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots$ であるから，ある n について $X = V_n$ となる。しかし F_n はあらゆる n について空集合ではないからこれは不可能である。したがって F_1, F_2, F_3, … の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は空集合ではなく，すべての F_n に属するような点 p が存在する。$p \in F_n$ であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対して $d(x_j, p) < \varepsilon$ となるような点 $x_j (j \geq n)$ がある (p は $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ の閉包に属しているので，$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ と p との距離はいくらでも小さくすることができる)。まず $\{x_1, x_2, \dots\}$ から $\varepsilon = 1$ に対して $d(x_{n_1}, p) < 1$ となるような点 x_{n_1} を一つ選ぶ（$n_1 \geq 1$，p は F_1 に属しているから可能である）。次に点列 $\{x_n;\ n > n_1\}$ から $d(x_{n_2}, p) < \frac{1}{2}$ を満たす点 x_{n_2}（$n_2 > n_1$）を選ぶ（p は F_{n_1+1} に属しているから可能である）。同様にして x_{n_3}, x_{n_4}, … と選んでいく。たとえば $x_{n_{j+1}} (j \geq 1)$ は点列 $\{x_n;\ n > n_j\}$ から $d(x_{n_{j+1}}, p) < \frac{1}{j+1}$ を満たすように選ばれる。すると点列 x_{n_1}, x_{n_2}, … は（$j \longrightarrow \infty$ のとき）p に収束する。 ☺

次にコーシー列と距離空間の完備性を定義する。

定義 1.21 (コーシー列，完備距離空間). X を距離空間，d をその距離関数とする。次の条件を満たす X の点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ をコーシー列 (Cauchy sequence) と呼ぶ。

> 任意の ε に対して，$j \geq N$, $k \geq N$ を満たす j, k について $d(x_j, x_k) < \varepsilon$ を満たす自然数 N が存在する。

これは点列の中のある番号以上の点同士の距離をいくらでも小さくできることを意味する。距離空間 X のコーシー列が常に X において極限を持つとき，X は完備 (complete) であると言う。

たとえば開区間は完備ではない。開区間 $(-1, 1)$ を考えてみよう。点列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ をとるとこれはコーシー列となる（$n(n+1) > \frac{1}{\varepsilon}$ を満たす自然数 n をとれば，どのような ε に対しても $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| < \varepsilon$ となるようにできる)。しかしこの点列の極限は 0 であり，開区間 $(-1, 1)$ には属していない。

次の補題は，すべての点列が収束する部分列を持つような距離空間は完備であることを主張する。

補題 1.44. X を距離空間とする。X のすべての点列が収束する部分列を持つならば X は完備である。

証明. $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を X のコーシー列とする。この点列は X の点 p に収束する部分列 x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ... を持つ。以下ではこのコーシー列自身が p に収束することを示す。

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ はコーシー列であるから，$\varepsilon > 0$ に対して，$m \geq N$, $n \geq N$ である m, n について $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ を満たすような自然数 N がある（$\frac{1}{2}\varepsilon$ も任意の ε の内である）。さらに，上記の部分列が p に収束することより，N を充分大きくとれば $n_j \geq N$ であるような n_j については $d(x_{n_j}, p) < \frac{1}{2}\varepsilon$ が成り立つ。したがって三角不等式により $n \geq N$ のとき

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

が得られる。これはコーシー列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ が p に収束することを意味するから，X は完備である。 ☺

この補題と上の補題1.43を合わせると，コンパクトな距離空間は完備であることがわかる。
ここで全有界という言葉を定義する。

定義 1.22 (全有界 (totally bounded)). 任意の $\varepsilon > 0$ について，距離空間 X が直径が ε より小さい有限個の X の部分集合の和集合で表せるとき，X は全有界であると言う。

X が全有界であれば X の部分集合も全有界である。各 $B_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ を直径が ε より小さい X の部分集合として，$X = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ と表すことができるとすると，ある X の部分集合 A は $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_k \cap A)$ と表せ，各 $B_i \cap A$ は A の部分集合で直径は ε より小さい。
コンパクト性と全有界性の関係を考える。

補題 1.45. X を距離空間とする。X のすべての点列が収束する部分列を持てば X は全有界である。

証明. X が全有界ではないと仮定すると，直径が 3ε より小さい有限個の X の部分集合の和集合では X を被覆することができないような ε（あるいは 3ε）の値がある。ここで，X から $m < k$, $n < k$, $m \neq n$ について $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ であるような $k-1$ 個の点列 $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ を選んでいるとする。各 x_m について半径 ε の開球 $B_X(x_m, \varepsilon)$ の直径は 2ε より大きくはない（3ε より小さい）から（X が全有界ではないとの仮定により）$m < k$ である $B_X(x_m, \varepsilon)$ の組によって X を被覆することはできず，どの $B_X(x_m, \varepsilon)$ にも含まれない点 x_k がある。そのとき $m < k$ について $d(x_m, x_k) \geq \varepsilon$ である。どのような有限の k についてもこのことが成り立つから，同じようにして無限個の点列 $x_1, x_2, \ldots$ を得ることができる。しかし，その点列に含まれる点の互いの距離は ε 以上なので収束する部分列を持たない。以上のことから X が収束する部分列を持てば X は全有界でなければならない。 ☺

次に完備かつ全有界な距離空間はコンパクトであることを示す。

補題 1.46. 完備かつ全有界であるような距離空間はコンパクトである。

証明. X を全有界な距離空間とする。X の開被覆の内で有限の部分被覆を持たないものがある（すなわち X がコンパクトではない）と仮定し，そのような開被覆を $\mathcal{V}$ とする。X のコーシー列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ の中に X の点に収束しないものがある（すなわち X が完備でない）ことを示さなければならない。

$\varepsilon > 0$とする。X は全有界であり，補題1.42によって X のすべての部分集合はその閉包と同じ直径を持つから，X は直径が ε より小さい有限個の閉集合によって被覆される。仮定により少なくとも一つのそのような閉集合は $\mathcal{V}$ に属する有限個の開集合によって被覆されない（もしすべての閉集合が $\mathcal{V}$ に属する有限個の開集合によって被覆されるならば，そのような被覆の和集合をとることによって X の有限な部分被覆を得ることができ，X はコンパクトとなる）。したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して直径が ε より小さく $\mathcal{V}$ の有限個の開集合によっては被覆されない X の閉部分集合が存在する。

次に以下のことを示す。

> $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ を満たし，各 F_n が $\frac{1}{2^n}$ より小さい直径を持ち，かつ $\mathcal{V}$ に属する有限個の開集合によっては被覆されないような X の閉集合の列 $F_1, F_2, F_3, \ldots$ が存在する。

X の閉部分集合で直径が $\frac{1}{2}$ より小さいものを F_1 とすると，これは X の部分集合であるから全有界である。上の議論を F_1 に適用すると任意の $\varepsilon > 0$ について $\mathcal{V}$ に属する有限個の開集合によっては被覆されないような F_1 の閉部分集合が存在する。その内直径が $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ より小さいものを F_2 とする。同様にして n に関する帰納法によって求める閉集合の列を得る。

各 $n \in \mathbb{N}$ について点 $x_n \in F_n$ を選ぶ。すると $m > n$ であるような m, n について x_m, x_n がともに F_n に属し，$\mathrm{diam}F_n < \frac{1}{2^n}$ であるから $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^n}$ である。したがって $x_1, x_2, x_3, \ldots$ はコーシー列となる。このコーシー列が X の点 p に収束すると仮定しよう。F_n は閉集合で $m \geq n$ について $x_m \in F_n$ であるから，各 $n \in \mathbb{N}$ について $p \in F_n$ である（距離空間または位相空間の閉部分集合に属する点列が収束するならば点列の極限はその閉集合に属する）。$\mathcal{V}$ は X の開被覆であるから $\mathcal{V}$ のある開集合 V について $p \in V$ である。そのとき $B_X(p, \delta)$ を X における p を中心とする半径 δ の開球とすると，$B_X(p, \delta) \subset V$ を満たすような δ が存在する（V は開集合であるから）。したがって n が充分に大きく $\frac{1}{2^n} < \delta$ であるときには $p \in F_n$ かつ $\mathrm{diam}F_n < \delta$ であるから $F_n \subset B_X(p, \delta) \subset V$ となり，$\mathcal{V}$ の有限個の開集合によって F_n が被覆されないということと矛盾する。ゆえにコーシー列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ は収束せず X は完備ではない。

以上のことから完備で全有界な距離空間はコンパクトでなければならない。 ☺

距離空間のコンパクト性は次のようにまとめられる。

定理 1.47. X を距離空間，d をその距離関数とすると次の三つの表現は同値である。

(1). X はコンパクトである。

(2). X のすべての点列は収束する部分列を持つ。

(3). X は完備かつ全有界である。

証明. 補題1.43，1.44，1.45，1.46より (i) が (ii) を，(ii) が (iii) を，(iii) が (i) を意味することがわかる。したがって (1), (2), (3) は互いに同値である。 ☺

1.16　ルベーグ（Lebesgue）の補題と一様連続性

補題 1.48 (ルベーグ（Lebesgue）の補題). (X, d) を（d を距離関数とする）コンパクトな距離空間，$\mathcal{U}$ を X の開被覆とする。そのとき，直径が δ より小さいすべての X の部分集合がそれぞれ開被覆 $\mathcal{U}$ に属する集合の一つに含まれるような正の実数 δ が存在する。

証明. X の各点は開被覆 $\mathcal{U}$ に属する集合の一つに含まれる。したがって X の各点 x について x を中心とする半径 $2\delta_x$ の開球 $B(x, 2\delta_x)$ が，$\mathcal{U}$ に属する一つの開集合に含まれるような実数 δ_x が存在する。一方 x を中心とする半径 δ_x の開球 $B(x, \delta_x)$ の組（X に属するすべての x について開球 $B(x, \delta_x)$ を集めたもの）は X を被覆し，X がコンパクトであることから

$$B(x, \delta_1) \cup B(x, \delta_2) \cup \cdots \cup B(x, \delta_r) = X,\ \delta_i = \delta_{x_i},\ i = 1, 2, \ldots, r$$

となるような有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ がある。δ を δ_1, δ_2, ..., δ_r の中で最小のものとする。A を直径が δ より小さい X の部分集合，u をその点とする。すると u は 1 から r までのある整数 i について $B(x_i, \delta_i)$ に属する。そのとき A の任意の点 v について距離の三角不等式によって

$$d(v, x_i) \leq d(v, u) + d(u, x_i) < \delta + \delta_i \leq 2\delta_i$$

となるから $A \subset B(x_i, 2\delta_i)$ である。一方 $B(x_i, 2\delta_i)$ は $\mathcal{U}$ に属する一つの集合に含まれるから，A もその集合に含まれる。 ☺

$\mathcal{U}$ をコンパクトな距離空間 X の開被覆とする。直径が δ より小さい X の部分集合のそれぞれが $\mathcal{U}$ に属する開集合の一つに含まれるような正の実数 δ を Lebesgue 数（ルベーグ数）と言う。上の Lebesgue の補題はコンパクトな距離空間の各開被覆に Lebesgue 数が存在することを示している。

X, Y をそれぞれ d_X, d_Y を距離関数とする距離空間とし，$f\colon\ X \longrightarrow Y$ を X から Y への関数とする。f が次の条件を満たすとき一様連続 (uniformly continuous) であると言う。

> 任意の $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ があり，$d_X(x, x') < \delta$ を満たす X の点 x, x' について $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ が成り立つ（δ の大きさは x, x' とは独立である）。

定理 1.49. X, Y を距離空間とし，X はコンパクトであるとする。そのとき X から Y への連続な関数は一様連続である。

証明. d_X, d_Y をそれぞれ距離空間 X, Y の距離関数とし，$f\colon\ X \longrightarrow Y$ を X から Y への連続関数とする。

任意の ε をとり，各 $y \in Y$ に対して

$$V_y = \{x \in X:\ d_Y(f(x), y) < \frac{1}{2}\varepsilon\}$$

と定義する（$f(x)$ と y の距離が $\frac{1}{2}\varepsilon$ より小さい x の集合）。y を中心とする半径 $\frac{1}{2}\varepsilon$ の Y における開球を $B_Y(y, \frac{1}{2}\varepsilon)$ とすると $V_y = f^{-1}(B_Y(y, \frac{1}{2}\varepsilon))$ である。開球 $B_Y(y, \frac{1}{2}\varepsilon)$ は開集合であり，f は連続であるから，すべての y について V_y は X において開集合であり，またすべての $x \in X$ について $x \in V_{f(x)}$ である。

そのとき V_y の組 $\{V_y:\ y \in Y\}$ は距離空間 X の開被覆となる。したがって Lebesgue の補題（補題 1.48）により直径が δ より小さいすべての X の部分集合が，ある V_y の部分集合と

なるような $\delta > 0$ がある。x, x' を $d_X(x, x') < \delta$ を満たす点とすると，集合 $\{x, x'\}$（x と x' の 2 点からなる集合）の直径は $d_X(x, x')$ であり，それは δ より小さい。したがって $x \in V_y$ かつ $x' \in V_y$ となるような $y \in Y$ がある。そのとき $d_Y(f(x), y) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $d_Y(f(x'), y) < \frac{1}{2}\varepsilon$ であるから

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), y) + d_Y(f(x'), y) < \varepsilon$$

となる。これは $f\colon\ X \longrightarrow Y$ が一様連続であることを示している。 ☺

1.17　ホモトピー

ここでは連続関数の間の重要な関係であるホモトピーについて考える。

定義 1.23 (ホモトピック (homotopic)・ホモトピー (homotopy)). f と g を位相空間 X から Y への連続関数であるとする。次の条件が満たされるとき f と g はホモトピックであると言う。

> すべての $x \in X$ について $H(x, 0) = f(x)$，$H(x, 1) = g(x)$ が成り立つような $X \times [0, 1]$ から Y への連続関数 $H(x, t)$（$x \in X,\ t \in [0, 1]$）が存在する。

f と g がホモトピックであるとき $f \simeq g$ と表し，H を f と g の間のホモトピーと呼ぶ。

f と g がホモトピックであるとは，位相空間 Y の中で関数 f をずるずると（連続的に）変形して g に作り変えることができることを意味する。

ここで次の補題を示す。

補題 1.50. X と Y を位相空間とすると，ホモトピックという関係 ($\simeq$) は X から Y への連続な関数についての同値関係である。

証明. (1). 連続な関数として f，g，h をとる。明らかに $f \simeq f$ である。ホモトピーとして $H(x, t) = f(x)$ をとればよい。したがって $\simeq$ は反射的である。

(2). $f \simeq g$ ならば f と g の間のホモトピー $H(x, t)$ が存在する。そのとき $H'(x, t) = H(x, 1-t)$ を考えると $H'(x, t)$ は連続でかつ $H'(x, 0) = g(x)$，$H'(x, 1) = f(x)$ を満たすから g から f へのホモトピーとなる。したがって $\simeq$ は対称的である（$H'(x, t)$ は f から g への変形を逆向きにたどるものである）。

(3). $f \simeq g$ かつ $g \simeq h$ であると仮定し，f と g の間のホモトピーを $H_1(x, t)$，g と h の間のホモトピーを $H_2(x, t)$ とする。ここで $H(x, t)$ を次のように定義する。

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{のとき} \\ H_2(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{のとき} \end{cases}$$

$H(x, t)$ は $H(x, \frac{1}{2}) (= H_1(x, 1) = H_2(x, 0)) = g(x)$ を満たし，$X \times [0, \frac{1}{2}]$ の間と $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ の間それぞれで連続であるから $X \times [0, 1]$ で連続である。また $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = h(x)$ を満たす。したがって $H(x, t)$ は f から h へのホモトピーとなり $f \simeq h$ が得られるから $\simeq$ は推移性を満たす。

「反射性」は f から f へ変形するには何もしなければよいということを，「対称性」は f から g へ変形できるならば逆向きに g から f へ変形できることを，「推移性」は f から g へ g から h へ変形できるならば，f から g を経由して h へ変形できるということを意味する。

☺

定義 1.24. X と Y を位相空間，A を X の部分集合であるとする。また f，g を X から Y への連続な関数であって $f|A = g|A$（すべての $a \in A$ について $f(a) = g(a)$）であると仮定する（A の上では f と g が一致することを意味する)。このとき次の条件が満たされるならば f と g は A に関してホモトピックであると言い，$f \simeq g \ \mathrm{rel} A$ と表す。

すべての $x \in X$ について $H(x, 0) = f(x)$，$H(x, 1) = g(x)$ を満たす f と g の間のホモトピー $H(x, t)$ があり，かつ $a \in A$ について $H(a, t) = f(a) = g(a)$ が成り立つ。

この関係も同値関係である。

2　単体・単体的複体と不動点定理

2.1　単体・単体的複体

まずユークリッド空間における点の位置関係について定義する。

定義 2.1 (幾何学的に独立（アフィン独立）). あるユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ の点 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q$ が次の条件を満たすとき幾何学的に独立 (geometrically independent)，あるいはアフィン独立 (affine independent) であると言う。

連立方程式

$$\sum_{j=0}^{q} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

$$\sum_{j=0}^{q} \lambda_j = 0$$

の解は $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$ のみである（$\mathbf{0}$ はゼロベクトル，すなわちすべての成分が 0 のベクトルである)。

$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$ 以外の解があれば $q + 1$ 個の点の少なくとも一つの座標が他の点の座標によって表されることになる。

3 次元ユークリッド空間内に，同一直線上にない 3 点をとると一つの 2 次元ユークリッド空間すなわち平面ができ，その平面上のすべての点の座標はその 3 点の座標によって表すことができる。したがって 2 次元ユークリッド空間において幾何学的に独立な点は多くても三つである。同様に k 次元ユークリッド空間において幾何学的に独立な点は多くても $k + 1$ 個である。

次に単体を定義する

定義 2.2 (単体 (simplex)). $\mathbb{R}^k$ における q 次元単体とは次のように表される集合である。

$$\left\{\sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{v}_j : 0 \leq t_j \leq 1,\ j = 0, 1. \dots, q,\ \sum_{j=0}^{q} t_j = 1\right\}$$

ただし $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ は幾何学的に独立な点である。これらは単体の頂点と呼ばれる。また q を単体の次元 (dimension) と言う。

0 次元単体は一つの点，1 次元単体は 2 点を結ぶ線分，2 次元単体は 3 点を頂点をする三角形，3 次元単体は 4 点を頂点をする四面体である。

ある q 次元単体を σ とすると，σ に含まれる（頂点，境界，内部を含めて）点 $\mathbf{x}$（の座標）は次のように表される。

$$\sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{v}_j = \mathbf{x},\ \sum_{j=0}^{q} t_j = 1,\ 0 \leq t_j \leq 1,\ j = 0, 1. \dots, q$$

ここで $t_0, t_1, \dots, t_q$ は一意に決まる。なぜならば，もし $\sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=0}^{q} s_j \mathbf{v}_j$ かつ $\sum_{j=0}^{q} t_j = \sum_{j=0}^{q} s_j = 1$ であるとすると $\sum_{j=0}^{q} (t_j - s_j)\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$，$\sum_{j=0}^{q} (t_j - s_j) = 0$ となり，$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ が幾何学的に独立であることからすべての j について $t_j - s_j = 0$ を得る。$t_0, t_1, \dots, t_q$ を点 x の重心座標と呼ぶ。

ここで次の補題を示す

補題 2.1. q を負でない整数，σ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ における q 次元単体，また τ を $\mathbb{R}^n (n \neq m)$ における q 次元単体とすると（$m \geq q$，$n \geq q$），σ と τ は同相である。

証明. $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ を σ の頂点，$\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q$ を τ の頂点とし，σ 上の点 $\sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{v}_j$ を τ 上の点 $\sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{w}_j$ に一対一に移すような同相写像として次式で表される h をとることができる。

$$h\left(\sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{w}_j$$

ただし，すべての $t_0, t_1, \dots, t_q$ について $0 \leq t_j \leq 1$，かつ $\sum_{j=0}^{q} t_j = 1$

☺

次に単体の面を定義する。

定義 2.3 (面 (face)). σ と τ を $\mathbb{R}^k$ における単体であるとする。τ の頂点の集合が σ の頂点の集合の部分集合である（τ のすべての頂点が σ の頂点でもある）とき τ は σ の面であると言う。ある単体の 1 次元の面を辺 (edge) と呼ぶ。

単体 σ 自身も σ の面であり，σ の頂点，辺（1 次元単体）も σ の面である。たとえば 3 次元単体（四面体）の場合，それ自身，その各面 (4 つある)，各辺 (6 つある)，各頂点（4 つある）がここで言う面である。

単体それ自身ではない単体の面を真の面 (proper face) と呼ぶことにする。

さらに単体的複体を定義する。

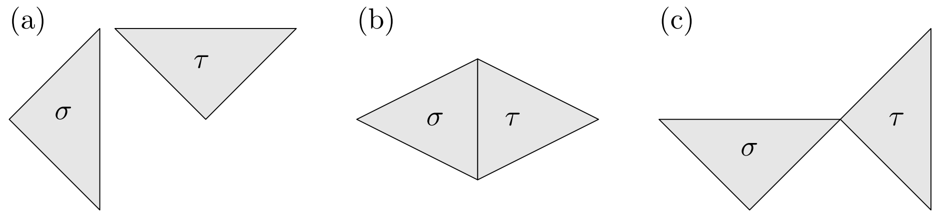
定義 2.4 (単体的複体 (simplicial complex)). $\mathbb{R}^k$ における有限個の単体の集合 K が次の条件を満たすとき単体的複体であると言う。

(1). σ が K に属する単体であるならば，σ のすべての面も K に属している。

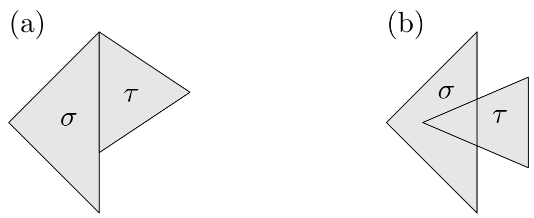
(2). σ_1，σ_2 を K に属する単体とすると，$\sigma_1 \cap \sigma_2$（σ_1 と σ_2 の共通部分）は空集合である（σ_1 と σ_2 には共通部分がない）か，あるいは $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は σ_1 と σ_2 両方の面になっている。

単体的複体とは，離れた単体同士を組み合わせたものか，またはいくつかの単体同士をつなげて貼り合わせて作ったものであり，単体同士は離れているか接しているだけで交わってはならず，接する単体を貼り合わせる場合にはそれぞれの単体の面になっている部分全体を貼り合わせなければならない。複数の三角形を長さが等しい辺で貼り合わせたものや，頂点で二つの三角形をつなげたものなどは単体的複体であるが，三角形の 1 辺の半分の部分に別の三角形を貼り合わせたものなどは単体的複体にはならない。

例 2.1. (1). 二つの単体 σ と τ に対して，次の三つの図形 (a), (b), (c) は単体的複体である。



(2). 次の二つの図形 (a), (b) は単体的複体ではない。



K が含む単体の内最も大きい次元の単体の次元を K の次元と呼ぶ。K に属するすべての単体の和集合を $|K|$ で表し多面体と呼ぶ。単体はすべてユークリッド空間のコンパクトな部分集合（有界閉集合）であるから，その有限個の和集合である多面体もコンパクトである。

ここで次の補題を示す。

補題 2.2. K を単体的複体，X をある位相空間とする。$|K|$ から X への関数 f は，K の各単体への f の制限がその単体において連続であるとき，K の多面体 $|K|$ において連続である。

証明. 補題 1.12により，ある位相空間が有限個の閉集合の和集合として表される場合，ある関数の各閉集合への制限がその閉集合において連続であるとき，その関数は空間全体で連続である。 ☺

K に属するすべての単体の頂点全体の集合を $\mathrm{Vert}K$ で表す。K の頂点のある組が K に属するある単体を構成するとき，その頂点の組がその単体を張る (span) と言う。

定義 2.5 (部分複体 (sub-complex)). K を $\mathbb{R}^k$ の単体的複体とする。K に属する単体の組 L が次の条件を満たすとき K の部分複体であると言う。

　σ が L に属する単体であるとき σ のすべての面も L に属する。

K の部分複体はそれ自身単体的複体である。

定義 2.6 (単体の内部 (interior)). $\mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}_1,\ \dots,\ \mathbf{v}_q$ を $\mathbb{R}^k$ の q 次元単体 σ の頂点とする。$\sum_{j=0}^{q} t_j\mathbf{v}_j$（すべての j について $t_j > 0$ かつ $\sum_{j=0}^{q} t_j = 1$）のように表される点の集合を σ の内部と呼ぶ。σ の内部とは σ の真の面に含まれない点の集合である。

0 次元単体の場合は 1 点であるから，それ自身が内部でもある。

単体 σ のあらゆる点はただ一つの σ の面（σ 自身も含めて）の内部に含まれる。$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots,$ $\mathbf{v}_q$ を σ の頂点，$\mathbf{x}$ を σ のある点とすると，$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{q} t_j\mathbf{v}_j$（すべての j について $0 \leq t_j \leq 1$ かつ $\sum_{j=0}^{q} t_j = 1$）と一意に表されるが，$\mathbf{x}$ を内部に含む面はこの式で $t_j > 0$ となっている $\mathbf{v}_j$ によって張られる面である（ある $t_j = 0$ であれば $\mathbf{x}$ を内部に含む面は頂点 $\mathbf{v}_j$ を含まない。すべての t_j がゼロになることはなく必ずある t_j は正である)。

ここで次の補題を示す。

補題 2.3. $\mathbb{R}^k$ の単体のある組を K とし，K に含まれるすべての単体の和集合を $|K|$ とする。このとき，次の条件が満たされるとき，またそのときにのみ K は単体的複体である。

(1). K はそれに含まれる単体のすべての面を含む。

(2). $|K|$ 上のすべての点は K に含まれるある一つの単体の内部に含まれる。

証明. まず K が単体的複体であると仮定してみよう。すると K はそれに属する単体の面を含んでいる。ここで示すべきは $|K|$ のすべての点が K のただ一つの単体の内部に含まれることである。$\mathbf{x} \in |K|$ とすると，ある単体に含まれるすべての点はいずれかの面（その単体自身も含めて）の内部に含まれる（頂点は 0 次元単体の内部に含まれる）から，$\mathbf{x}$ は K のある単体の面 σ に含まれる。そのとき，K はその単体の面を含むから $\sigma \in K$ である。したがって $\mathbf{x}$ は K の少なくとも一つの単体の内部に含まれる。$\mathbf{x}$ が K の二つの単体 σ と τ の内部に含まれると仮定してみよう。すると K は単体的複体であるから $\mathbf{x}$ は σ と τ のある共通の面 $\sigma \cap \tau$ に含まれなければならない。しかし，σ と τ は異なる単体であるからこの共通の面は σ 自身あるいは τ 自身ではない面でなければならないが，これは $\mathbf{x}$ が σ と τ の内部に含まれるということと矛盾する。ゆえに，$\mathbf{x}$ をその内部に含む K の単体はただ一つであることが言える。

逆に，上の条件を満たす単体の組が単体的複体であることを示そう。K はその単体のすべての面を含んでいるから示すべきは σ と τ が K の二つの単体であって共通部分が空集合ではないときに $\sigma \cap \tau$ が σ と τ の共通の面になっていることである。$\mathbf{x} \in \sigma \cap \tau$ とすると，$\mathbf{x}$ は K のただ一つの単体 ω に属している。一方 σ と τ の任意の点はそれらの単体のただ一つの面に属しており，また σ と τ のすべての面は K に属している。したがって ω は σ と τ の共通の面であり，ω の頂点は σ，τ 両方の頂点である。よって単体 σ と τ は共通の頂点を持ち，$\sigma \cap \tau$ のすべての点はその共通の頂点が張る σ と τ の共通の面 ρ に属している。これは $\sigma \cap \tau = \rho$ を意味し，したがって $\sigma \cap \tau$ は σ と τ の共通の面である。 ☺

定義 2.7 (三角形分割 (triangulation)). ある位相空間 X とユークリッド空間における単体的複体 K の多面体 $|K|$ との間に同相写像 $h\colon\ |K| \longrightarrow X$ があるとき，(K,h) を X の三角形分割と呼ぶ。

単体的複体から作られる多面体はコンパクト空間であるから，ある位相空間が三角形分割可能ならばそれはコンパクト空間でなければならない。

補題 2.4. X をハウスドルフ空間，K を単体的複体とし，$h\colon\ |K| \longrightarrow X$ を $|K|$ から X への全単射であるとする。h の K の各単体への制限がその単体上で連続であれば $h\colon\ |K| \longrightarrow X$ は同相写像であり，したがって (K,h) は X の三角形分割である。

証明. K の各単体は $|K|$ の閉部分集合であり，K の単体の数は有限個である。したがって補題 1.12により $h\colon\ |K| \longrightarrow X$ は連続である。また K の多面体 $|K|$ はコンパクトな位相空間である。コンパクトな位相空間からハウスドルフ空間への連続な全単射は同相写像である（定理 1.38）から (K,h) は X の三角形分割となる。 ☺

2.2 単体写像

まず「単体写像」を定義する。

定義 2.8 (単体写像). ある単体的複体 K の頂点の集合 $\mathrm{Vert}K$ からある単体的複体 L の頂点の集合 $\mathrm{Vert}L$ への関数 s が次の条件を満たすとき K と L の間の「単体写像 (simplicial map)」であると言う。

> K の頂点のある集合 $\mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_q$ が K に含まれる q 次元単体を張るとき，$s(\mathbf{v}_0),\ s(\mathbf{v}_1),\ \ldots,\ s(\mathbf{v}_q)$ は L に含まれる q 次元単体を張る。

K から L への単体写像 $s\colon\ K \longrightarrow L$ は多面体 $|K|$ から $|L|$ への連続写像 $s\colon\ |K| \longrightarrow |L|$ を次のように自然に導く。

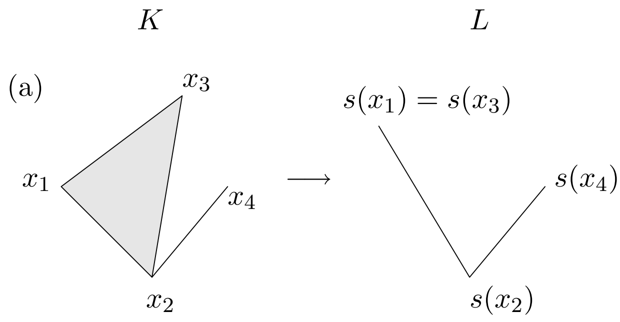
$$s\left(\sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=0}^{q} t_j s(\mathbf{v}_j)$$

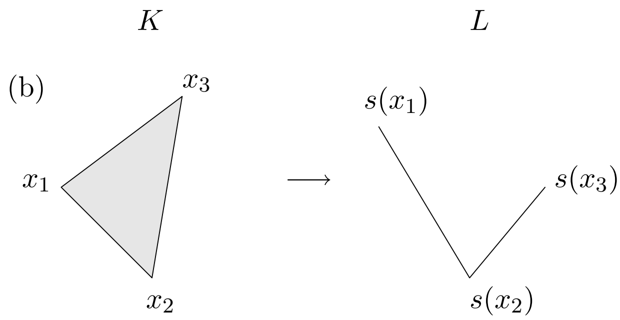
ただし $j = 0, 1, \ldots, q$ について $0 \le t_j \le 1$ かつ $\sum_{j=0}^{q} t_j = 1$ であり，また $\mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_q$ は K の単体を張る頂点である。この写像の連続性は補題 1.12から導かれる（各単体の中でこの写像は連続）。この写像によって $\mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_q$ が張る K の単体の $(t_0, t_1, \ldots, t_q)$ という座標を持つ点が，$s(\mathbf{v}_0),\ s(\mathbf{v}_1),\ \ldots,\ s(\mathbf{v}_q)$ が張る L の単体のやはり $(t_0, t_1, \ldots, t_q)$ という座標を持つ点に移される。したがって K の単体 σ の内部は L の単体 $s(\sigma)$ の内部に移される。$s(\sigma)$ は σ の頂点が s によって移される点によって張られる単体である。

単体写像は，二つの単体的複体の頂点の間の関数と見ることも，一つの単体的複体から別の単体的複体への関数と見ることも，あるいは二つの単体的複体の多面体の間の関数と見ることもできる。

なお単体写像において異なる頂点が同じ点に写像されてもかまわない，すなわちある $\mathbf{v}_i$ と $\mathbf{v}_j (\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_i)$ について $s(\mathbf{v}_i) = s(\mathbf{v}_j)$ となってもかまわない。したがって $\mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_q$ によって張られる K の単体より，$s(\mathbf{v}_0),\ s(\mathbf{v}_1),\ \ldots,\ s(\mathbf{v}_q)$ によって張られる L の単体の方が次元が低いこともあり得る。

例 2.2. 次の図に示す写像 $s\colon\ K \longrightarrow L$ について，(a) は単体写像であるが (b) は単体写像ではない。





(a) においては $x_1,\ x_2,\ x_3$ および $x_2,\ x_4$ が K の単体（それぞれ三角形と線分）を張り，$s(x_1)(s(x_3))$, $s(x_2)$ および $s(x_2)$, $s(x_4)$ が L の単体（ともに線分）を張っている。一方，(b) においては x_1, x_2, x_3 が K の単体 (三角形) を張っているが，L において $s(x_1)$, $s(x_2)$, $s(x_3)$ は単体を張っていない。

2.3　単体の重心分割

σ を $\mathbb{R}^k$ における q 次元単体，その頂点を $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q$ とする。σ の重心を次のように定義する。

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{q+1}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_q)$$

0 次元単体（点）の重心はその点自身，1 次元単体（線分）の重心はその中点，2 次元単体（三角形）の重心はその三角形の重心（三角形の頂点と向かい合った辺の中点を結ぶ線分を 2:1 に内分する点)，などである。

σ と τ があるユークリッド空間の単体であって，σ が τ の真の面になっている場合，$\sigma < \tau$ と書くことにする。

ある単体 K_1 が次の条件を満たすとき K の分割 (subdivision) であると言う。

> $|K_1| = |K|$ であって，K_1 の単体はすべて K の単体でもある。

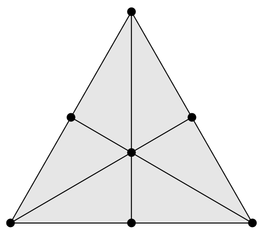
定義 2.9 (重心分割 (barycentric subdivision)). K を $\mathbb{R}^k$ の単体的複体であるとする。K' が次の条件を満たすとき K の一次重心分割 (first barycentric subdivision) であると言う。

> K' は $\mathbb{R}^k$ の単体の組であり，その単体の頂点は $\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_r$ という関係を満たす K の単体の列 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ の重心 $\hat{\sigma_0}, \hat{\sigma_1}, \ldots, \hat{\sigma_r}$ からなる。したがっ

て K' の頂点の集合は K の単体のすべての重心からなる（K の頂点は K に含まれる 1 次元単体であり，その重心はその点自身であるから K' にも含まれる)。

たとえば K が一つの三角形（2 次元単体）からなる場合，その一次重心分割とは K の面である三角形の各辺（1 次元単体）の中点と三角形の重心をとり，その三角形の重心から各辺の中点を結ぶ 3 本の線分を引き，さらに三角形の重心から三角形の各頂点へ 3 本の線分を引いて作られたものであり，もとの三角形は 6 つの小さい三角形に分割されているとともに各辺も半分づつに分割されている。

例 2.3. 重心分割の例



次の補題によって示されるように，このようにして作られた K の重心分割自身も単体的複体である。

補題 2.5. K をあるユークリッド空間の単体的複体であり，K' をその一次重心分割であるとする。そのとき K' 自身も単体的複体であり，$|K'|$ と $|K|$ とは一致する。

証明. K に含まれる単体の数に関する数学的帰納法で証明する。K が一つの単体からなる場合は 1 点のみであるから明らかに成り立つ。$|K|$ が一つの三角形である場合には K は少なくともその三角形と三つの辺，三つの頂点を含む。$|K|$ が線分である場合にも，K はその線分と両端の点を含んでいる。ある単体的複体をとり，それよりも少ない数の単体を含む単体的複体について結論が成り立つと仮定する。

重心分割 K' の定義から K' の単体のあらゆる面は K' に含まれているから，ここで示すべきは K' からとった二つの単体は共通部分を持たないか，または共通部分がその二つの単体の共通の面になっていることである。

K と同じ次元を持つ K の単体 σ をとり，$L = K \setminus \{\sigma\}$（$K$ から σ を取り除いたもの）とする。すると σ は K の単体の真の面ではない（K と同じ次元であるから）から L は K の部分複体となる。L は K よりも少ない単体を含む。したがって帰納法の仮定から L'（L の重心分割）は単体的複体であり $|L'| = |L|$ が成り立つ。また K' の定義から K' は以下のものによって構成される。

- L' の単体
- σ の重心 $\hat{\sigma}$
- σ の真の面の重心を頂点とする L' の単体 ρ に σ の重心 $\hat{\sigma}$ を加えて得られた単体 $\hat{\sigma}\rho$

たとえば σ および K を一つの三角形とすると $L = K \setminus \{\sigma\}$ は三角形の辺と頂点からなり，L' はその三角形の辺の中点で辺を分割したものである。ρ はその三角形の辺の中点と頂点を

結ぶ線分または頂点および辺の中点それ自身であり，$\hat{\sigma}\rho$ はその線分と三角形の重心によって作られる三角形あるいは頂点（または辺の中点）と重心を結ぶ線分である。

このようなタイプの単体の共通部分を考えると，K' の任意の二つの単体は共通の面で交わっていることがわかる。L' は単体的複体であるから L' の任意の二つの単体は共通の面で交わる。その頂点が σ の面の重心であるような L' の単体 ρ_1, ρ_2 をとると，$\rho_1 \cap \rho_2$ は ρ_1 と ρ_2 の共通の面であり，また $\hat{\sigma}\rho_1 \cap \hat{\sigma}\rho_2 = \hat{\sigma}(\rho_1 \cap \rho_2)$ であるから，$\hat{\sigma}\rho_1 \cap \hat{\sigma}\rho_2$ は $\hat{\sigma}\rho_1$ と $\hat{\sigma}\rho_2$ の共通の面である（$\hat{\sigma}\rho_1$，$\hat{\sigma}\rho_2$ はそれぞれ ρ_1 と $\hat{\sigma}$ によって作られる単体，ρ_2 と $\hat{\sigma}$ によって作られる単体であり，それらの共通部分は ρ_1 と ρ_2 の共通部分である $\rho_1 \cap \rho_2$ と $\hat{\sigma}$ によって作られる単体に等しい）。また，L' の任意の単体 τ は σ の重心とは交わっていないから，$\hat{\sigma}\rho \cap \tau = \rho \cap \tau$ である。以上のことから K' は単体的複体である。

最後に $|K'| = |K|$ を確認しよう。K' のすべての単体が K の単体に含まれるから $|K'| \subset |K|$ である。$\mathbf{x}$ を単体 σ の点とすると，σ の面に属する点 $\mathbf{y}$ と $t \in [0,1]$ を用いて $\mathbf{x} = (1-t)\hat{\sigma} + t\mathbf{y}$ と書ける。そのとき，$\mathbf{y} \in |L|$ であり，帰納法の仮定から $|L| = |L'|$ である。ゆえに $\mathbf{y}$ は σ の真の面の重心を頂点とする L' の単体 ρ に属している。そうすると $\mathbf{x} \in \hat{\sigma}\rho$ となり，$\mathbf{x} \in |K'|$ である。したがって $|K| \subset |K'|$ となるから求める $|K'| = |K|$ が得られる。 ☺

K の j 次重心分割 $K^{(j)}$ を，帰納的に $K^{(j-1)}$ の一次重心分割として定義する（K' の一次重心分割が $K^{(2)}$，$K^{(2)}$ の一次重心分割が $K^{(3)}$，などとして順に定義する）。K が三角形の場合の例で言えば，各辺の中点と三角形の重心によって一度分割してできた小さい三角形について，さらに各辺の中点と三角形の重心をとって分割するのが二次重心分割，それを繰り返して j 次重心分割 $K^{(j)}$ が得られる。

補題 2.6. σ を q 次元単体，τ を σ の面とする。また $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$ をそれぞれの重心とする。σ のすべての 1 次元単体（辺）が d 以下の長さ $(d > 0)$ を持つならば

$$|\hat{\sigma} - \hat{\tau}| \leq \frac{qd}{q+1}$$

である。

証明. $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_q$ を σ の頂点とする。$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ を σ の点とすると，$\mathbf{y} = \sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{v}_j$（$j = 0, 1, \ldots, q$ について $0 \leq t_j \leq 1$ かつ $\sum_{j=0}^{q} t_j = 1$）と書ける。したがって

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = &\left| \sum_{i=0}^{q} t_i(\mathbf{x} - \mathbf{v}_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{q} t_i |\mathbf{x} - \mathbf{y}_i| \\ &\leq \max(|\mathbf{x} - \mathbf{v}_0|, |\mathbf{x} - \mathbf{v}_1|, \ldots, |\mathbf{x} - \mathbf{v}_q|) \end{aligned}$$

この結果を $\mathbf{x} = \hat{\sigma}$, $\mathbf{y} = \hat{\tau}$ に適用すると

$$|\hat{\sigma} - \hat{\tau}| \leq \max(|\hat{\sigma} - \mathbf{v}_0|, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_1|, \ldots, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_q|)$$

が得られる。一方，頂点 $\mathbf{v}_i$ とは逆の方向にある σ の $q-1$ 次元の面の重心を $\mathbf{z}_i$ とすると（$\mathbf{z}_i = \frac{1}{q}\sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j$），$i = 0, 1, \ldots, q$ について

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{q+1}\mathbf{v}_i + \frac{q}{q+1}\mathbf{z}_i$$

である。また $\mathbf{z}_i \in \sigma$ である。したがって $i = 0, 1, \ldots, q$ について

$$|\hat{\sigma} - \mathbf{v}_i| = \frac{q}{q+1}|\mathbf{z}_i - \mathbf{v}_i| \leq \frac{qd}{q+1}$$

となる[2]。したがって

$$|\hat{\sigma} - \hat{\tau}| \leq \max(|\hat{\sigma} - \mathbf{v}_0|, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_1|, \ldots, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_q|) \leq \frac{qd}{q+1}$$

を得る。 ☺

K の辺（1 次元単体）の内最も長さが大きいものの長さを $\mu(K)$ で表す。

補題 2.7. K が k 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ の n 次元の単体的複体で，K' がその一次重心分割であるとすると，

$$\mu(K') \leq \frac{n}{n+1}\mu(K)$$

が成り立つ。

証明. K' の 1 次元単体は $(\hat{\tau}, \hat{\sigma})$ の形に表すことができる。σ は K の q 次元単体 $(q \leq n)$，τ はその面である（K' は K の重心分割であるから，K' の 1 次元単体は K に含まれるある単体（q 次元単体）の重心とその面の重心とを結んだ線分である）。すると補題 2.6により

$$|\hat{\tau} - \hat{\sigma}| \leq \frac{q}{q+1}\mu(K) \leq \frac{n}{n+1}\mu(K)$$

が得られる。 ☺

この補題から $K^{(j)}$ を K の j 次重心分割とすると $\lim_{j\to+\infty}\mu(K^{(j)}) = 0$ であることがわかる。すなわち重心分割を繰り返して行くと単体的複体を構成する 1 次元単体の大きさは 0 に収束して行くのである。

2.4 単体近似定理

まず「単体近似」を定義する。

定義 2.10 (単体近似). 単体的複体 K と L によって作られる多面体を $|K|, |L|$ で表し，f を $|K|$ から $|L|$ への連続関数とする。K から L への単体写像 s およびそれから自然に導かれる連続写像（やはり s で表す）が次の条件を満たすとき，単体写像 s は f の単体近似 (simplicial approximation) であると言う。

> $|K|$ 上の各点 $\mathbf{x}$ について $s(\mathbf{x})$ は $f(\mathbf{x})$ をその内部に含むただ一つの L の単体の要素である。

---

[2]

$$|\mathbf{z}_i - \mathbf{v}_i| = \left|\frac{1}{q}\sum_{j\neq i}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)\right| \leq \frac{1}{q}\sum_{j\neq i}|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i|$$

より $|\mathbf{z}_i - \mathbf{v}_i| \leq d$ である。

つまり，すべての $\mathbf{x}$ について $s(\mathbf{x})$ と $f(\mathbf{x})$ とが L の同じ単体に含まれているということである。

K から L への単体写像 s が $|K|$ から $|L|$ への関数 f の単体近似であるとき，s と f はホモトピックである。これは $|K|\times[0,1]$ から $|L|$ への関数 $(1-t)f(\mathbf{x})+ts(\mathbf{x})$（$(\mathbf{x},t)\in|K|\times[0,1]$）が f と s の間のホモトピーになることからわかる。

次に「星状体」を定義する。

定義 2.11 (星状体 (star)). K を単体的複体，$\mathbf{x}\in|K|$ とする。点 $\mathbf{x}$ を含むすべての K の単体の内部の和集合を K における $\mathbf{x}$ の星状体と呼び，$\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ と表す。

たとえば一つの三角形を 1 回重心分割した単体的複体を K とすると，その三角形の重心の星状体は三角形の内部であり，三角形の頂点の星状体は，その頂点自身，それを含む辺の内部（逆の頂点は含まない），およびその三角形の内部の和集合である。

星状体について次の補題を得る。

補題 2.8. K を単体的複体，$\mathbf{x}\in|K|$ とする。そのとき星状体 $\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ は $|K|$ において開集合であり，$\mathbf{x}\in\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$（$\mathbf{x}$ は星状体に含まれる）である。

証明. 補題 2.3により $|K|$ のすべての点は K のただ一つの単体の内部に属している。したがって $|K|$ における $\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ の補集合 $|K|\setminus\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ を含まない K の単体の内部の和集合である（これには $\mathbf{x}$ を含まない線分や $\mathbf{x}$ 以外の頂点も含まれる）。一方，K の単体が $\mathbf{x}$ を含まなければその面も $\mathbf{x}$ を含まない。さらに，ある単体のすべての面の内部の和集合はその単体自身に他ならない。したがって $|K|\setminus\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ を含まない K のすべての単体の和集合である。しかし，K の各単体は $|K|$ の閉集合であるから $|K|\setminus\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ は有限個の閉集合の和集合であり，それ自身 $|K|$ の閉集合である。よって $\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ が $|K|$ の開集合であることが導かれる。また $\mathbf{x}$ が少なくとも一つの K の単体の内部に属しているので $\mathbf{x}\in\mathrm{st}_K(\mathbf{x})$ である。 ☺

さらに次の補題を得る。

補題 2.9. 単体的複体 K, L の頂点の集合の間の関数 $s:\ VertK\longrightarrow VertL$ は次の条件が満たされるとき，またそのときにのみ単体写像であり，かつある連続関数 $f:\ |K|\longrightarrow|L|$ の単体近似である。

K のすべての頂点 $\mathbf{v}$ について $f(\mathrm{st}_K(\mathbf{v}))\subset\mathrm{st}_L(s(\mathbf{v}))$ である。

証明. $s:\ K\longrightarrow L$ を $f:\ |K|\longrightarrow|L|$ の単体近似とし，$\mathbf{v}$ を K の頂点，$\mathbf{x}\in\mathrm{st}_K(\mathbf{v})$ であるとする。そのとき $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$ はそれぞれただ一つの単体 $\sigma\in K$, $\tau\in L$ の内部に属している。さらに，$\mathrm{st}_K(\mathbf{v})$ の定義から $\mathbf{v}$ は σ の頂点でなければならない。s が f の単体近似であるから $s(\mathbf{x})$ は τ に属しており，したがって $s(\mathbf{x})$ は τ のある面の内部に属していなければならない。一方，$\mathbf{x}$ は σ の内部にあるので $s(\mathbf{x})$ は $s(\sigma)$ の内部に属していなければならない。したがって，$s(\sigma)$ は τ の面であり，$s(\mathbf{v})$ は τ の頂点である。よって $f(\mathbf{x})\in\mathrm{st}_L(s(\mathbf{v}))$ であり，$s:\ K\longrightarrow L$ が $f:\ |K|\longrightarrow|L|$ の単体近似であるならば $f(\mathrm{st}_L(\mathbf{v}))\subset\mathrm{st}_L(s(\mathbf{v}))$ であることが言える。

逆に $s:\ VertK\longrightarrow VertL$ がすべての K の頂点 $\mathbf{v}$ について $f(\mathrm{st}_K(\mathbf{v}))\subset\mathrm{st}_L(s(\mathbf{v}))$ を満たすような関数であるとする。$\mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_q$ を頂点とする K のある単体の内部の点を $\mathbf{x}$ と

すると，$j=0,1,2,\dots,q$ に対して $\mathbf{x}\in \mathrm{st}_K(\mathbf{v}_j)$ であるから $f(\mathbf{x})\in \mathrm{st}_L(s(\mathbf{v}_j))$ である。したがって各々の $s(\mathbf{v}_j)$ は $f(\mathbf{x})$ をその内部に含むただ一つの単体 $\tau\in L$ の頂点でなければならない。したがって $s(\mathbf{v}_0)$, $s(\mathbf{v}_1)$, …, $s(\mathbf{v}_q)$ は τ の面を張り，$s(\mathbf{x})\in\tau$ である。以上によって $s\colon\ VertK \longrightarrow VertL$ は $f\colon\ |K|\longrightarrow |L|$ の単体近似となる単体写像を表現していることが言えた。 ☺

この補題から次の系が得られる。

系 2.10. K, L, M を単体的複体とする。$s\colon\ K\longrightarrow L$, $t\colon\ L\longrightarrow M$ がそれぞれ連続関数 $f\colon |K|\longrightarrow |L|$, $g\colon |L|\longrightarrow |M|$ の単体近似であれば, $t\circ s\colon\ K\longrightarrow M$ は $g\circ f\colon\ |K|\longrightarrow |M|$ の単体近似である。

証明. s が f の単体近似であるから K の頂点 $\mathbf{v}$ について

$$f(\mathrm{st}_K(\mathbf{v}))\subset \mathrm{st}_L(s(\mathbf{v}))$$

であり，また t が g の単体近似であるから L の頂点 $s(\mathbf{v})$ について

$$g(\mathrm{st}_L(s(\mathbf{v})))\subset \mathrm{st}_M(t(s(\mathbf{v})))$$

をである。したがって

$$g(f(\mathrm{st}_K(\mathbf{v})))\subset g(\mathrm{st}_L(s(\mathbf{v})))\subset \mathrm{st}_M(t(s(\mathbf{v})))$$

を得る。これは $t\circ s$ が $g\circ f$ の単体近似であることを意味する。 ☺

最後に次の定理を得る。

定理 2.11 (単体近似定理 (Simplicial Approximation Theorem)). K と L を単体的複体，f を $|K|$ から $|L|$ への連続関数とする。そのとき，充分大きな j について f の単体近似となる $K^{(j)}$ から L への単体写像 s が存在する。

証明. L の頂点を $\mathbf{w}$ とすると，補題 2.8によって各 $\mathrm{st}_L(\mathbf{w})$ は $|L|$ の開集合であり，$\mathbf{w}$ が L の任意の単体の頂点であるときその単体の内部は $\mathrm{st}_L(\mathbf{w})$ に含まれるので，L のすべての頂点 $\mathbf{w}$ の星状体 $\mathrm{st}_L(\mathbf{w})$ の組は $|L|$ の開被覆となる。関数 $f\colon\ |K|\longrightarrow |L|$ は連続であるから，$\mathbf{w}$ の星状体の f による逆像 $f^{-1}(\mathrm{st}_L(\mathbf{w}))$ の組は $|K|$ の開被覆となる（$|K|$ の各点は $|L|$ のある点に移され，その $|L|$ の点はいずれかの $\mathrm{st}_L(\mathbf{w})$ に属している。したがって $|K|$ のすべての点はいずれかの $f^{-1}(\mathrm{st}_L(\mathbf{w}))$ に属しており，また各 $f^{-1}(\mathrm{st}_L(\mathbf{w}))$ は開集合である）。したがって Lebesgue の補題により，直径が δ より小さい $|K|$ の各部分集合についてその集合の点が全体として f によって L のある頂点 $\mathbf{w}$ の $\mathrm{st}_L(\mathbf{w})$ の中に移されるような実数 $\delta>0$ が存在する（各部分集合がいずれかの $f^{-1}(\mathrm{st}_L(\mathbf{w}))$ に含まれる）。

ここで補題 2.7より

$$\mu(K^{(j)})\leq \left(\frac{\mathrm{dim}K}{\mathrm{dim}K+1}\right)^j \mu(K)$$

であるから，$j\longrightarrow +\infty$ のとき K の j 次重心分割について $\mu(K^{(j)})$ は 0 に近づく。したがって $\mu(K^{(j)})<\frac{1}{2}\delta$ となるように j を選ぶことができる。$\mathbf{v}$ を $K^{(j)}$ の頂点とすると，$\mathrm{st}_{K^{(j)}}(\mathbf{v})$ の点は $\mathbf{v}$ から $\frac{1}{2}\delta$ 以内の距離に位置しており，$\mathrm{st}_{K^{(j)}}(\mathbf{v})$ の直径は高々 δ である。よって $K^{(j)}$ の各頂点 $\mathbf{v}$ について L の頂点 $s(\mathbf{v})$ を $f(\mathrm{st}_{K^{(j)}}(\mathbf{v}))\subset \mathrm{st}_L(s(\mathbf{v}))$ となるように選ぶことができる。このようにして，$K^{(j)}$ の頂点から L の頂点への関数 $s\colon\ VertK^{(j)}\longrightarrow VertL$ が得られる。補題 2.9によりこれが求める f の単体近似である。 ☺

2.5 Sperner の補題

K をある n 次元単体 Δ を分割して作られた単体的複体であるとする。K の各頂点に対して以下のルールに基づいて 0 から n までの番号を振る。

(1). Δ の頂点（$n+1$ 個ある）については 0 から n までの番号を一つづつの頂点に割り振る（順序は問わない）。

(2). K のある頂点 $\mathbf{v}$ が Δ のある面に含まれている場合には，その面のある頂点（Δ の頂点でもある）と同じ番号を $\mathbf{v}$ に割り振る（$\mathbf{v}$ は Δ またはその面の頂点であるとは限らず，Δ を分割してできた単体の頂点であるかもしれない）。

このような番号の振り方を「Sperner ラベリング (Sperner labeling)」と呼ぶ。このとき次の補題が成り立つ。

補題 2.12 (Sperner の補題). K をある n 次元単体 Δ を分割して作られた単体的複体であるとする。K の頂点に Sperner ラベリングのルールによって番号を振るとき，K の n 次元単体の中で各頂点にちょうど 0 から n までの番号が割り振られるものの個数は奇数である。

証明. 0 から n までの番号の内 i_0, i_1, $\dots$, i_q の q 個の整数がちょうど一つづつその頂点に割り振られているような K の q 次元単体の個数を $N(i_0, i_1, \dots, i_q)$ で表す。証明すべきは $N(0, 1, \dots, n)$ が奇数であることである。

Δ の次元に関する数学的帰納法で証明する。まず $n = 0$ の場合は番号は 0 だけしかなく，それ以上分割できない 0 次元単体が一つしかないので補題が成り立つのは明らかである。次に $n-1$ 以下の次元について補題が成り立つと仮定する。K の各 n 次元単体 σ について，$0, 1, \dots, n-1$ とラベルづけされた σ の $n-1$ 次元の面の数を $p(\sigma)$ で表す。σ が $0, 1, \dots, n$ とラベルづけされていれば $p(\sigma) = 1$, 一方 $0, 1, \dots, n-1, j (j < n)$ とラベルづけされていれば $p(\sigma) = 2$ で，それ以外の場合は $p(\sigma) = 0$ である。したがって

$$\sum_{\substack{\sigma \in K \\ \dim\sigma = n}} p(\sigma) = N(0, 1, \dots, n) + 2\sum_{j=0}^{n-1} N(0, 1, \dots, n-1, j)$$

が得られる。なお，ある $0, 1, \dots, n-1$ とラベルづけされた $n-1$ 次元の面が複数の n 次元単体の共通の面になっている場合には重複して数えられている。

Sperner ラベリングの定義により，$0, 1, \dots, n-1$ とラベルづけされた K の単体を含むのは $0, 1, \dots, n-1$ とラベルづけされた頂点を持つ Δ の $n-1$ 次元面のみであり，それは一つしかない。したがって，その面に含まれる $0, 1, \dots, n-1$ とラベルづけされた K の $n-1$ 次元単体の数を M とすると $N(0, 1, \dots, n-1) - M$ は Δ の内部と交わる $0, 1, \dots, n-1$ とラベルづけされた $n-1$ 次元単体の数に等しい。Δ の真の面に含まれる K のいかなる $n-1$ 次元単体も K のただ一つの n 次元単体の面でなければならず，また Δ の内部と交わるどのような $n-1$ 次元単体も K のちょうど二つの n 次元単体の面でなければならないので，

$$\sum_{\substack{\sigma \in K \\ \dim\sigma = n}} p(\sigma) = M + 2(N(0, 1, \dots, n-1) - M)$$

を得る。この場合にもある $0,1,\ldots,n-1$ とラベルづけされた $n-1$ 次元の面が複数の n 次元単体の共通の面になっている場合には重複して数えられている。

> Δ の内部にある $n-1$ 次元単体は $n-1$ 次元の超平面の一部であり，その超平面によって Δ は二つの部分に分けられる。$n-1$ 次元単体の頂点を $\mathbf{v}_i(i=1,2,\ldots,n)$ とするとその超平面上のある点 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^n t_i\mathbf{v}_i(\sum_{i=1}^n t_i=1)$ と表される。一方 Δ の点 $\mathbf{y}$ は，$n-1$ 次元の超平面上にはないある点を $\mathbf{z}$ として
>
> $$\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{z}$$
>
> と表される。このとき $\lambda>1$ ならば $\mathbf{y}$ は超平面を挟んで $\mathbf{z}$ とは逆の側にあり，$\lambda<1$ ならば $\mathbf{z}$ と同じ側にある（$\lambda=1$ のときは超平面上にある）。このようにして二つの部分に分けられた Δ のそれぞれの 1 点と $n-1$ 次元単体によって n 次元単体が作られるので $n-1$ 次元単体は二つの n 次元単体の面となる。しかし $n-1$ 次元単体が Δ の真の面になっている場合は，Δ が超平面によって分けられる部分の片方にしかその面が含まれないので $n-1$ 次元単体はただ一つの n 次元単体の面となる。

これらの等式より

$$N(0,1,\ldots,n)+2\sum_{j=0}^{n-1}N(0,1,\ldots,n-1,j)=M+2(N(0,1,\ldots,n-1)-M)$$

が得られ，変形すると

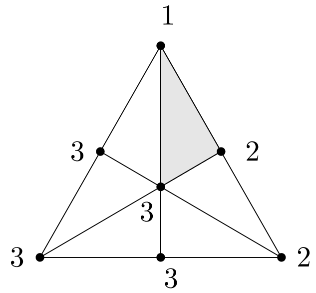
$$N(0,1,\ldots,n)-M=2[(N(0,1,\ldots,n-1)-M)-\sum_{j=0}^{n-1}N(0,1,\ldots,n-1,j)]$$

となる。したがって $N(0,1,\ldots,n)-M$ は偶数である。一方，帰納法の仮定によって Sperner の補題が $n-1$ 次元までは成り立つので M は奇数である。したがって $N(0,1,\ldots,n-1)$ も奇数でなければならない。 ☺

0 から n までの番号が割り振られるものの個数が奇数であるということは少なくとも 1 個はそのようなものが存在することを意味する。

例 2.4. Sperner の補題の例

三角形を 1 度重心分割した単体的複体の各頂点に図のように番号を振る。この番号の振り方は Sperner ラベリングの条件を満たしている。図の網掛けで示した部分が 1, 2 ,3 のラベルを持った単体である。



2.6　Brouwer の不動点定理

Sperner の補題を用いて Brouwer の不動点定理を証明するが，その前に次の補題を示す。

補題 2.13. Δ を n 次元単体，$\partial\Delta$ をその境界とする。そのとき Δ から $\partial\Delta$ への連続関数 r で，$\partial\Delta$ 上の点を動かさない（$r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$）ようなものは存在しない。

Δ の境界とは Δ より 1 次元低い次元の Δ の面の和集合であり，Δ が三角形（2 次元単体）の場合は三つの辺をつないだもの，四面体の場合は四つの面である。

証明. そのような関数 $r:\ \Delta \longrightarrow \partial\Delta$ が存在すると仮定してみよう。単体近似定理（定理 2.11）によって，充分大きな j の値について Δ とそのすべての面からなる単体的複体の j 次重心分割を K，Δ のすべての面からなる単体的複体を L（L に Δ 自身は含まれない）として r の単体近似 $s:\ K \longrightarrow L$（K から L への単体写像）が存在する。

Δ のある真の面 Σ に属する K の頂点を $\mathbf{v}$ とすると $r(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ であり，$s:\ K \longrightarrow L$ は $r:\ \Delta \longrightarrow \partial\Delta$ の単体近似であるから $s(\mathbf{v})$ は Σ の頂点でなければならない（単体写像 s は頂点を頂点に移し，Δ の真の面の点は r によって動かないのでそれが移される点も Δ の真の面に属している。さらに s は r の単体近似であるから s によって Δ の真の面の点から移される点はもとの点と同じ単体に属していなければならない）。特にすべての Δ の頂点 $\mathbf{v}$ については $s(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ である（$\mathbf{v}$ そのものが Δ の真の面である）。

$\mathbf{v} \mapsto m(\mathbf{v})$ を Δ の頂点に $0, 1, \ldots, n$ の数字を割り振るラベルづけとし，$\mathbf{v} \mapsto m(s(\mathbf{v}))$ を K の頂点 $\mathbf{v}$ に $\mathbf{v} \mapsto m(\mathbf{v})$ によって $s(\mathbf{v})$ に割り振られている番号と同じ番号を割り振るラベルづけとすると（s が単体写像であるから $s(\mathbf{v})$ は Δ の頂点である），これは K の頂点の Sperner ラベリングになる。

> $\mathbf{v}$ が Δ の頂点のときには $s(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ であるから $\mathbf{v} \mapsto m(\mathbf{v})$ によって $\mathbf{v}$ に割り振られる番号と $\mathbf{v} \mapsto m(s(\mathbf{v}))$ によって割り振られる番号とが等しいので Sperner ラベリングの条件 (1) が成り立つ。また上で見たように $\mathbf{v}$ が Δ のある真の面 Σ に属する頂点である場合には $s(\mathbf{v})$ は Σ の頂点でなければならないから Sperner ラベリングの条件 (2) が成り立つ。

したがって Sperner の補題（補題 2.12）により $0, 1, \ldots, n$ とラベルづけされた K の n 次元単体 σ が少なくとも一つは存在する（σ の点は Δ の真の面に含まれているとは限らない）。そうすると $s(\sigma) = \Delta$ となるが（K の各頂点は s によって自身に割り振られた番号と同じ番号を持つ Δ の頂点に移される）Δ は L の単体ではないからこれは不可能である。よってすべての $\mathbf{x} \in \partial\Delta$ について $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ を満たすような連続関数 $r:\ \Delta \longrightarrow \partial\Delta$ は存在しない。　☺

この補題に基づいて Brouwer の不動点定理を証明する。

定理 2.14 (Brouwer の不動点定理). 閉じた n 次元球 E^n からそれ自身への連続な関数を f とすると，f は少なくとも一つの不動点（$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ となるような $\mathbf{x} \in E^n$）をもつ。

証明. f が不動点をもたないと仮定してみる。E^n の各点 $\mathbf{x}$ について $f(\mathbf{x})$ から出て $\mathbf{x}$ を通る半直線（$f(\mathbf{x})$ から出て $\mathbf{x}$ を突き抜けて先へ進む線）が E^n の境界 S^{n-1}（$n-1$ 次元の球面である）と交わる点を $q(\mathbf{x})$ で表す。f が連続であるから E^n から S^{n-1} への関数 q も連続であり，かつ S^{n-1} 上の点 $\mathbf{x}$ については $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ が成り立つ。閉じた n 次元球 E^n は n 次元単体

Δ と同相であるから，Δ 上のすべての点 $\mathbf{y}$ について，Δ から E^n へのある同相写像 h と Δ から $\partial\Delta$ への連続関数 r によって $h(r(\mathbf{y})) = q(h(\mathbf{y}))$ と表すことができる（h によって $\partial\Delta$ の点は S^{n-1} の点に一対一に移される）。

> $q \circ h$ によって $\Delta \longrightarrow E^n \longrightarrow S^{n-1}$ と移され，$h \circ r$ によって $\Delta \longrightarrow \partial\Delta \longrightarrow S^{n-1}$ と移される。

さらに，すべての $y \in \partial\Delta$ について $r(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ である。しかし，補題 2.13によりそのような Δ から $\partial\Delta$ への連続関数 r は存在しない。したがって f は少なくとも一つの不動点をもつ。 ☺

2.7　Brouwer の不動点定理の一般均衡理論への応用：交換経済の均衡

有限個の財と有限個の家計（消費者）からなる交換経済，すなわち財は生産されず各家計がもともと持っている財を交換するような経済を考える。交換，消費は一つの時点（1 期間）でのみ行われる。財は無限に分割可能であり，その量は実数で表される。具体的に n 個の財，m 個の家計があるものとし，財を i で家計を h で表す。家計 h は当初 $\bar{x}_{hi}$（$\bar{x}_{hi} \geq 0$）の i 財を持っている。家計 h の初期保有量はベクトル $\bar{\mathbf{x}}_h \in \mathbf{R}^n$（$\bar{\mathbf{x}}_h$ の第 i 成分は $\bar{x}_{hi}$）で表すことができる。また i 財の価格を p_i（$p_i \geq 0$）とすると n 個の財の価格はベクトル $\mathbf{p}$（第 i 成分は p_i）で表現される。すると，家計 h の初期保有量の価値は（ベクトルの内積，成分ごとの積の和）$\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}_h$ に等しい。交換における家計 h の i 財に対する需要 $x_{hi}(\mathbf{p})$ は初期保有量が与えられれば各財の価格によって決まる $\mathbf{p}$ の関数である。家計の財に対する需要はあらゆる価格において定義され，また連続（わずかな価格の変化によって需要が大きく変化し過ぎない）であると仮定する。n 個の財に対する需要をベクトル $\mathbf{x}_h$ で表す（$\mathbf{x}_h$ の第 i 成分は x_{hi}）。家計の予算制約式は $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_h(\mathbf{p}) - \bar{\mathbf{x}}_h) \leq 0$ で表される。この式は財に対する需要の価値の合計が初期保有量の価値を越えないことを意味する。各家計は予算を残しても使う機会がなくより望ましい消費を実現するにはすべて使った方がよいので，予算制約式は以下のようの等式で表されると仮定する。

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_h(\mathbf{p}) - \bar{\mathbf{x}}_h) = 0$$

各家計は与えられた初期保有量のもとで予算制約式を満たすようにそれぞれの選好において最も望ましい（効用を最大化する）消費のベクトルを選択する。予算制約式から，家計の需要は財の相対価格にのみ依存することがわかる。すべての財の価格を一定倍（たとえば λ 倍）しても各財の需要は変わらない，すなわち $\mathbf{x}_h(\lambda\mathbf{p}) = \mathbf{x}_h(\mathbf{p})$ である。交換における財の総供給は $\sum_h \bar{\mathbf{x}}_h$ で表される。ここで $\sum_h$ は家計全体で合計することを意味する。同様に総需要は $\sum_h \mathbf{x}_h(\mathbf{p})$ と表現される。需要と供給の差を超過需要と定義して $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ で表せば

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_h (\mathbf{x}_h(\mathbf{p}) - \bar{\mathbf{x}}_h) = \mathbf{x}(\mathbf{p}) - \bar{\mathbf{x}}$$

が得られる。$\mathbf{x}(\mathbf{p})$，$\bar{\mathbf{x}}$ はそれぞれ家計全体の需要と初期保有量を表すベクトルである。各家計の需要がすべての価格において定義され連続であるから，超過需要もすべての価格において定義され連続である。$z_i(\mathbf{p})$ を $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ の第 i 成分，すなわち i 財の超過需要とすれば $z_i(\mathbf{p}) > 0$ のときには超過需要，$z_i(\mathbf{p}) < 0$ のときには超過供給になっている。すべての家計の予算制約式を足し合わせると $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}(\mathbf{p}) - \bar{\mathbf{x}}) = 0$ から

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$$

を得る。この式はワルラスの法則と呼ばれる。

$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$ として各財の価格を

$$q_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i} p_i$$

に従って定義し直すと $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ となり，財の価格は $n-1$ 次元単体に含まれる点によって表される。この q_i をあらためて p_i で表すことにする。

以上の準備をもとに次の定理を示す。

定理 2.15 (交換経済における均衡の存在). 有限個の財と有限個の家計からなる交換経済において価格 $\mathbf{p}$ における超過需要を $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ で表すと，$\mathbf{z}(\mathbf{p})$ は以下の条件を満たす。

(1). $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ はあらゆる価格 $\mathbf{p}$ について定義され，また $\mathbf{p}$ に関して連続である。

(2). あらゆる価格 $\mathbf{p}$ について $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ が成り立つ（ワルラスの法則）。

(3). そのとき，すべての財 i について $z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$（超過需要・超過供給がともにゼロか，または超過供給が存在する）を満たす均衡価格ベクトル $\mathbf{p}^*$ が存在する。

証明. (1), (2) はすでに確認したので (3) を示す。

$i = 1, 2, \ldots, n$ について $0 \leq p_i \leq 1$ および $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ を満たすすべての点 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ を含む $\mathbb{R}^n$ における $n-1$ 次元単体を Δ とし，Δ から $\mathbb{R}^n$ へのある関数を $\mathbf{v}$ として，その第 i 成分 v_i が次のように表されるものとする。

$$v_i(\mathbf{p}) = \begin{cases} p_i + z_i(\mathbf{p}) & z_i(\mathbf{p}) > 0 \text{ のとき,} \\ p_i & z_i(\mathbf{p}) \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

あらゆる $\mathbf{p}$ について $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ であり，かつ $\mathbf{v}$ の各成分は非負である。この $\mathbf{v}$ から次のような Δ から Δ への関数 φ を作ることができる。

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} v_i(\mathbf{p})} \mathbf{v}(\mathbf{p})$$

$\varphi(\mathbf{p})$ の第 i 成分は $\varphi_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} v_i(\mathbf{p})} v_i(\mathbf{p})$ であり，$0 \leq \varphi_i(\mathbf{p}) \leq 1$，$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{p}) = 1$ を満たす。

Brouwer の不動点定理により $\varphi(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$ を満たす $\mathbf{p}^* \in \Delta$ が存在する。$v_i(\mathbf{p}) \geq p_i$ であるから，ある $\lambda \geq 1$ について $\mathbf{v}(\mathbf{p}^*) = \lambda \mathbf{p}^*$ が成り立つ。以下では $\lambda = 1$ を示す。$\lambda > 1$ と仮定してみよう。すると，$p_i^* > 0$ であるときには $v_i(\mathbf{p}^*) > p_i^*$，すなわち $z_i(\mathbf{p}^*) > 0$ となる。一方，すべての i について $p_i^* \geq 0$ であり，かつ少なくとも一つの i について $p_i^* > 0$ である（$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，すなわち $\mathbf{p}^* \in \Delta$ であるから）。そうすると $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) > 0$ となりワルラスの法則と矛盾する。したがって $\lambda = 1$ であり，すべての i について $v_i = p_i^*$ および $z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$ が導かれる。 ☺

すべての i について $z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$ であり，かつ $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$ であるということは $p_i^* z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$（すべての i について）であることを意味するから，$p_i > 0$ のときには $z_i(\mathbf{p}^*) = 0$ である。したがって均衡価格においては供給は常に需要に等しいかあるいは超過しており，正の価格を持つ財（普通はそうだが）については需要と供給は等しくなければならない。

参考文献

[1] K. C. Border, “Fixed point theorems with applications to economics and game theory”（1985, Cambridge University Press）

[2] 小山昭雄,「経済数学教室 3（線型代数と位相 上）」（1994, 岩波書店）

[3] G. L. Naber, “Topological methods in Euclidean spaces”（2000, Dover Publications）

[4] 二階堂副包,「現代経済学の数学的方法」（1960, 岩波書店）

[5] 二階堂副包, “Convex structures and economic theory”(1968, Academic Press)

著者略歴

田中靖人（たなか・やすひと）
1953 年　大阪府岸和田市生まれ
1976 年　京都大学工学部卒業
1983 年　横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了
1986 年　東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得
山形大学人文学部講師，同助教授
中央大学法学部助教授を経て
現在　中央大学法学部教授，博士・経済学（中央大学）
専攻　理論経済学，ゲーム理論とその応用

著書

『ゼロから始める経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゼロから始める国際経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゲーム理論と寡占』（中央大学出版部, 2001）

主要論文

“Tariffs and welfare of an exporting country in a free entry oligopoly under integrated markets”, *Oxford Economic Papers* Vol. 44, Oxford University Press, 1992.

“Export subsidies under dynamic duopoly”, *European Economic Review* Vol. 38, North-Holland, 1994.

“Long run equilibria in an asymmetric oligopoly”, *Economic Theory* Vol. 14, Springer-Verlag, 1999.

“A finite population ESS and long run equilibria in an n players coordination game”, *Mathematical Social Sciences* Vol. 39, North-Holland, 2000.

“Stochastically stable states in an oligopoly with differentiated goods: Equivalence of price and quantity strategies”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 34, North-Holland, 2000.

“Profitability of price and quantity strategies in a duopoly with vertical product differentiation”, *Economic Theory* Vol. 17, Springer-Verlag, 2001.

“Profitability of price and quantity strategies in an oligopoly”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 35, North-Holland, 2001.

“Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentiated goods”, *International Journal of Industrial Organization* Vol. 19, North-Holland, 2001.

E-Mail: yasuhito@tamacc.chuo-u.ac.jp