Biais cognitifs, asymétrie d'information et formation des prix

Michael Kaestner*

Mars 2003

Résumé

L'objectif de la Finance comportementale est de proposer une alternative théorique à la Théorie des Marchés Efficients, en introduisant des hypothèses moins restrictives quant à la rationalité des individus. La compréhension de la formation des prix sur les marchés financiers lorsqu'une partie des investisseurs est susceptible de subir des biais cognitifs constitue une des voies de recherche principales.

Nous proposons une extension du modèle de Grossman et Stiglitz (1980) en intégrant des investisseurs qui révisent leurs croyance de manière erronée, en se basant sur (1) une information a priori erronée et/ou (2) une sur- ou sous-estimation de la qualité de leur signal privé. Nous montrons l'impact des biais cognitifs sur le degré d'efficience du système de prix et montrons les biais individuels sont partiellement transmis aux agents non-informés, qui tentent d'inférer l'information privée.

Abstract

Behavioral Finance aims to propose a theoretical alternative to EMH (Efficient Market Hypothesis), allowing for not fully rational behavior. Understanding price formation when some agents are victim of cognitive biases is one of the most important research fields.

We propose an extension of Grossman et Stiglitz (1980)'s framework by integrating investors, who do not update their beliefs fully rationaly, using (1)incorrect priors and/or failing to assess correctly the quality of their private signal. We evaluate the impact of the considered bias on the efficiency of the price system and show that individual biases are partially transmitted to uninformed agents, who try to infer the private signal.

*Membre du GESEM Finance, Université Montpellier I et du CREGO, Université Montpellier II.

Correspondance : Faculté d'Administration et Gestion, Université Montpellier I, Espace Richter, Avenue de la Mer, BP 9640, 34054 Montpellier Cedex 1, kaestner@univ-montp1.fr

Biais cognitifs, asymétrie d'information et formation des prix

Introduction

La théorie financière classique, dont les fondements sont largement inspirés de la théorie économique connaît, depuis le début des années 80, des critiques de plus en plus fortes. Un des paradigmes dominants, celui de la rationalité parfaite de l'individu, n'échappe pas à cette évolution. La finance comportementale, courant initié par les travaux de De Bondt et Thaler et des psychologues Kahneman et Tversky, tente reconsidérer la panoplie des anomalies mises en évidence sur les marches financiers, en proposant des hypothèses moins restrictives quant au comportement des investisseurs.

La finance comportementale repose sur deux piliers indissociables que sont **la psychologie de l'investisseur** d'une part et les **limites de l'arbitrage** d'autre part.[1] La thèse selon laquelle l'investisseur individuel n'est pas entièrement rationnel a été confirmée par de nombreuses études expérimentales.

Selon la théorie de l'efficience des marchés, un tel comportement irrationnel individuel ne peut influencer le prix de manière durable, le retour à l'équilibre étant assuré par des processus d'arbitrage. L'un des apports majeurs de la Finance comportementale est d'avoir montré que ces transactions sont en réalité risquées pour les arbitrageurs et, par conséquent, limitées. Dès lors il n'est pas exclu que des comportement irrationnel individuels ou collectifs puissent persister et influencer de manière durable les prix sur les marchés.

La notion de ,,rationalité" renferme deux hypothèses quant au comportement de l'individu : la première suppose une révision des croyances en cas d'information nouvelle conforme à la règle de Bayes, la deuxième stipule la stabilité des préférences et la maximisation de l'utilité espérée. Cette dualité a été la source de deux voies de recherche distinctes. La première, initiée

[1] Shleifer and Summers 1990 semble avoir été à l'origine de cette classification duale, qui est aujourd'hui largement acquise, comme le souligne Barberis et Thaler (2002).

par Kahneman et Tversky (1979) a conduit à la formulation d'une théorie alternative au comportement rationnel de l'individu et connue sous le nom de ,,prospect theory".[2]

La deuxième voie de recherche étudie la formation des prix lorsqu'une partie des investisseurs n'exploite pas correctement l'information dont elle dispose. Les travaux tendent à montrer que ces erreurs, appelées ,,biais cognitifs", n'ont pas un caractère aléatoire, comme le suggère la Théorie des Marchés Efficients (EMH - Efficient Market Hypothesis), mais qu'elles sont au contraire responsables d'une partie des anomalies mises en évidence dans le passé, en générant, selon les cas, sur- et sous-réactions individuelles et collectives.[3] Barberis, Shleifer, et Vishny (1998), Daniel, Hirshleifer, et Subrahmanyam (1998) et Hong et Stein (1998) en constituent les principales références théoriques.

Le modèle que nous proposons dans cet article analyse l'impact de la présence d'investisseurs irrationnels sur l'efficience informationnelle du système de prix lorsque les échanges se déroulent sur un marché de type walrasien. Ce cadre suppose par définition l'absence de possibilités d'arbitrage, le prix d'équilibre résultant directement de la confrontation entre offre et demande. Après avoir présenté les hypothèses de notre modèle, nous déterminerons les caractéristiques du prix d'équilibre avant de discuter l'impact de certains biais cognitifs.

[2]Voir Tversky et Kahneman (1992), Barberis, Huang, et Santos (1999) ou Barberis et Thaler (2002) pour une revue de la littérature récente.

[3]Un des arguments principaux en faveur de l'existence des biais cognitifs est la quantité d'information disponible, dépassant largement les capacités de traitement de l'individu isolé et connu sous le nom de **surcharge cognitive**. Des règles simplificatrices aux cours du traitement de l'information peuvent alors conduire à des raisonnements biaisés et des décisions partiellement irrationnelles.

1 Le modèle

1.1 Hypothèses

Notre modèle est une extension du cadre désormais classique de Grossman et Stiglitz (1980). Nous maintenons l'hypothèse de concurrence parfaite entre les investisseurs et intégrons une catégorie d'investisseurs supplémentaire, qui peut avoir une vision erronée de la valeur espérée de l'actif et/ou de la qualité du signal qu'elle reçoit sur cette valeur.

La structure de marché est de type walrasien ; la recherche du prix d'équilibre est confiée à un commissaire-priseur, qui ne prend pas part aux échanges. Le prix d'équilibre est celui qui égalise l'offre et la demande.

1.1.1 Les actifs

Il existe un actif risqué et un actif sans risque, de rendement nul. Le prix d'équilibre de l'actif risqué est noté P, sa vraie valeur est notée υ.

La vraie valeur de l'actif risqué est supposée suivre une loi normale d'espérance μ et de variance σ_υ^2 :

$$\upsilon = \mu + \epsilon_\upsilon \tag{1}$$

avec

$$\epsilon_\upsilon^* \sim N(0, \sigma_\upsilon)^4 \tag{2}$$

1.1.2 Les agents économiques

Nous supposons l'existence de trois types d'investisseurs : des agents informés, des agents non-informés et des investisseurs affichant des biais à la rationalité parfaite.

Ils sont respectivement présents en proportion π_i, π_u et π_b ($\pi_i + \pi_u + \pi_b = 1$) et négocient l'actif risqué sur la base des anticipations réalisées à partir des informations dont ils disposent.

[4] Nous utiliserons la notation $(\cdot)^*$ à chaque fois que nous souhaitons désigner une variable aléatoire .

On note Q_n et W_n les richesses initiale et finale de l'agent n. Chaque agent économique est supposé maximiser l'espérance d'utilité de sa richesse finale W, compte tenu de son information.

Les agents ont une utilité exponentielle négative :

$$U_n(W_n) = \exp(-a_n \times W_n) \tag{3}$$

1.2 Caractéristiques réelles et perçues du signal s

Avant les échanges, les agents informés et les agents irrationnels reçoivent un signal, supposé identique pour les deux catégories d'agents sur la valeur de l'actif risqué. Les investisseurs non-informés ne reçoivent pas d'information sur cette valeur et n'observent que le prix d'équilibre P, qui résulte de la confrontation entre offre et demande.

Le signal reçu par un agent informé est de la forme :

$$s = \upsilon + \epsilon_i, \tag{4}$$

$\epsilon_i^{*\prime}$ étant normalement distribué, de moyenne $\theta_i = 0$ et de variance ϑ_i^2.

Le signal s constitue donc une information bruitée sur la vraie valeur de l'actif υ. La précision de cette prévision est inversement proportionnelle à la variance du terme d'erreur ϵ_i^*.

Nous considérons qu'un investisseur informé n'est pas parfaitement rationnel s'il interprète le signal reçu de manière erronée et distinguerons deux cas de figure :

– Si l'investisseur est très optimiste (respectivement pessimiste) sur la valeur υ, il attribuera une importance moindre à tout signal s qui serait inférieur (supérieur) à sa prévision.
– Si l'investisseur sur-évalue (respectivement sous-évalue) la qualité du signal reçu, il sous-estime (sur-estime) le terme d'erreur ϵ, accordant ainsi trop(pas assez) de poids au signal s dans l'anticipation de υ.

D'une manière générale, l'investisseur irrationnel croît observer un signal s de la forme :

$$s = \upsilon + \theta_b + \epsilon_i', \tag{5}$$

le bruit ϵ_i' étant normal, centré et de variance ϑ_b. Le paramètre θ_b mesure le degré d'optimisme ; ainsi, un paramètre θ_b positif (négatif) conduit l'investisseur à sur-estimer (sous-estimer) l'espérance de la valeur de l'actif.

Les propriétés additives des lois normales nous permettent de spécifier un terme d'erreur ϵ_b^*, tel que :

$$s = \upsilon + \epsilon_b, \tag{6}$$

l'erreur d'appréciation étant alors entièrement capté par la distribution de ϵ_b^*, qui est normale, de moyenne θ_b et de variance ϑ_b.[5]

Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que les variables υ^*, ϵ_i^* et ϵ_b^* sont mutuellement indépendantes. Le vecteur $(\upsilon^*, \epsilon_i^*, \epsilon_b^*)$ suit donc une loi normale d'espérance $(\mu, 0, \theta_b)$ et de matrice variance-covariance :

$$\begin{pmatrix} \sigma_\upsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_b \end{pmatrix} \tag{7}$$

1.2.1 Interprétation rationnelle de l'information

Nous supposons dans le cadre de notre modèle que l'investisseur connaît la valeur moyenne de la variable aléatoire υ^*. Lorsqu'il reçoit le signal s, il va déterminer l'espérance de υ^*, compte tenu de son information et de la précision de celle-ci :

$$E(\upsilon^*|s) = \mu + \frac{cov(\upsilon^*, s^*)}{V(s^*)}(s - \mu) \tag{8}$$

Comme nous avons stipulé une indépendance entre les termes d'erreur qui affectent les variables υ^* et s^*, la covariance entre ces deux variables est identique à la variance de υ^* :

$$cov(\upsilon^*, s^*) = \sigma_\upsilon^2 \tag{9}$$

[5]Il convient de noter que cette équation n'est pas vérifiée, compte tenu de la distribution de s, mais qu'il s'agit de la distribution supposée du signal.

L'espérance conditionnelle de υ^* peut s'interpréter comme une moyenne pondérée de l'information *a priori* μ et du signal, ce dernier étant affecté d'un coefficient dépendant de la variance de υ^* et de la précision du signal $V(s^*)$. Lorsque le signal sur υ est parfait, il est de la même précision que la composante aléatoire de la valeur de l'actif ($V(s^*) = \sigma_\upsilon^2$), l'espérance conditionnelle de υ^* est donc égale au signal reçu. Si la précision du signal diminue par contre, *ceteris paribus*, l'incertitude sur la qualité du signal s pousse l'agent rationnel à rapprocher son estimation de la valeur moyenne μ.

Il est important de noter ici que la précision du signal s'apprécie par rapport à la variance de la valeur l'actif risqué, en effet, lorsque les deux grandeurs varient de manière identique, l'espérance conditionnelle $E(\upsilon^*|s)$ reste inchangée. Nous définirons donc la **précision relative** du signal, notée τ, par le rapport entre la variance de la valeur de l'actif et la qualité du signal :

$$\tau = \frac{\sigma_\upsilon^2}{V(s^*)} \tag{10}$$

La précision τ est maximale lorsque les deux variances sont identiques, elle devient plus faible lorsque le signal devient plus imprécis et que $V(s^*)$ augmente.

L'espérance conditionnelle $E(\upsilon^*|s)$ peut s'interpréter comme la valeur υ ,,la plus probable", compte tenu de l'information reçue s. Elle sera utilisée, comme on le verra ultérieurement, dans la détermination de la demande d'actif formulée par l'agent rationnel et interviendra dans la formation du prix d'équilibre.

Il apparaît alors que la prise en compte d'une information *a priori* erronée ou encore une mauvaise estimation de la précision du signal ($V(s^*)$) peut fausser l'estimation $E(\upsilon^*|s)$ d'un investisseur. Des croyances biaisées sur les paramètres de la distribution de s peuvent ainsi modifier la demande transmise au marché et, par conséquent, le prix d'équilibre.

1.2.2 Conséquences de l'existence de biais cognitifs

Un investisseur peut, dans notre cadre simple, réaliser des erreurs d'appréciation de la précision du signal $V(s^*)$ et de la valeur moyenne de l'actif $E(\upsilon)$. Nous envisageons dans un premier temps une erreur sur l'information *a priori* avant de généraliser l'analyse.

Lorsqu'un investisseur se base sur une croyance *a priori* erronée du type :[6]

$$E_b(\upsilon^*) = \mu' = \mu + \theta_b, \tag{11}$$

il réalise une erreur d'estimation de $E(\upsilon^*|s)$ égale à :

$$E_b(\upsilon^*|s) - E_i(\upsilon^*|s) = \theta_b(1 - \tau_i) \tag{12}$$

Il apparaît que l'erreur d'estimation augmente avec θ_b, qui traduit le degré d'optimisme de l'investisseur ; l'estimation de υ conditionnellement à l'information reçue sera supérieure (respectivement inférieure) à sa valeur rationnelle $E_i(\upsilon^*|s)$ si l'investisseur est optimiste (pessimiste), c'est à dire lorsque $\theta_b > 0$ ($\theta_b < 0$).

L'erreur d'estimation est également influencée par la précision relative du signal τ_i (supposée ici identique pour les agents informés et irrationnels), cette dernière conditionnant le poids de l'information nouvelle (s) dans la détermination de $E(\upsilon|s)$.

L'analyse de l'erreur d'estimation de υ liée à une croyance *a priori* erronée et d'un mauvaise perception de la précision du signal est plus complexe. Si un investisseur réalise son anticipation à partir d'une précision relative erronée(biaisée), notée τ_b, il procède à l'estimation suivante :

$$E_b(\upsilon|s) = \mu + \theta_b + \tau_b(s - \mu - \theta_b) \tag{13}$$

soit une erreur d'évaluation par rapport à l'estimation rationnelle $E_i(\upsilon|s)$ égale à :

$$E_b(\upsilon|s) - E_i(\upsilon|s) = \theta_b(1 - \tau_b) + (s - \mu)(\tau_b - \tau_i) \tag{14}$$

[6]Nous utiliserons par la suite un indice $(\cdot)_i$ pour caractériser des données propres aux agents informés rationnels et un indice $(\cdot)_b$ pour les données d'agents subissant des biais cognitifs.

L'investisseur irrationnel réalise une erreur d'estimation qui se compose d'une erreur liée à une information *a priori* fausse ($\theta_b(1-\tau_b)$) et d'une erreur liée à une mauvaise appréciation de la précision relative du signal reçu ($(s-\mu)\tau_b - \tau_i$).

Conformément à l'intuition, cette erreur d'évaluation augmente en valeur absolue lorsque l'erreur qui porte sur l'information *a priori* ($|\theta_b|$) augmente ou encore lorsque le signal est très différent de la valeur espérée de v^*.

L'analyse de l'impact de la variable τ_b est plus subtile. L'erreur liée à l'information *a priori* diminue si la précision relative τ_b augmente, puisque le poids de l'information initiale dans le calcul de l'espérance conditionnelle de v^* diminue. Une augmentation de τ_b entraîne par contre une confiance accrue de l'investisseur dans le contenu informationnel du signal reçu, augmentant ainsi l'erreur d'estimation.

Dans la section suivante, nous verrons, comment ces erreurs d'interprétation du signal peuvent perturber la recherche du prix d'équilibre.

1.3 La recherche du prix d'équilibre

1.3.1 Les fonctions de demande

Chaque agent présent sur le marché détermine sa répartition optimale entre l'actif risqué et l'actif sans risque, en fonction de son information (notée Φ) et formule sa demande pour l'actif risqué en fonction du prix d'équilibre en maximisant l'espérance de l'utilité associée à sa richesse finale.[7]

La demande d'actif risqué de l'agent n dépend de l'écart entre sa prévision moyenne de v et le prix actuel, de son aversion pour le risque a_n et de la variance de sa prévision :

$$X_n = \frac{E(v|\Phi_n) - P}{a_n V(v|\Phi_n)} \tag{15}$$

[7] Le lecteur intéresse pourra trouver les calculs détaillés dans Roger (1991) ou dans leur version originale, légèrement différente sur le plan mathématique dans Grossman et Stiglitz (1980).

1.3.2 L'offre d'actif

L'offre d'actif est notée x et supposée normale, centrée et de variance σ_x^2. Cette offre aléatoire empêche les agents non-informés d'inférer parfaitement l'information détenue par les agents informés.

1.3.3 Le prix d'équilibre

Compte tenu de la structure de marché que nous avons retenu pour notre modèle, à savoir un fixing, le prix d'équilibre est celui qui égalise l'offre et la demande, pour toute réalisation de (s, x) :

$$\pi_i X_i + \pi_b X_b + \pi_u X_u = x \tag{16}$$

Il est possible de montrer que ce programme a une solution de la forme :

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 \omega, \tag{17}$$

α_1 et α_2 étant deux réels, qui découlent de l'équation B.14, présenté en annexe. P étant une fonction linéaire de ω, les caractéristiques de la distribution de ω^* permettent de déduire celles de P^*

ω est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \omega &= E_i(v|s) + \lambda_1 \Delta E_{b,i} + \lambda_2 x \\ &\quad \text{pour tout } (\pi_i, \pi_b), \text{ tel que} \pi_i + \pi_b \neq 0 \text{ et} \\ \omega &= x \\ &\quad \text{lorsque } \pi_i + \pi_b = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\pi_b a_i V_i(v|s)}{\pi_i a_b V_b(v|s) + \pi_b a_i V_i(v|s)} \\ \lambda_2 &= \frac{a_i V_i(v|s) a_b V_b(v|s)}{\pi_i a_b V_b(v|s) + \pi_b a_i V_i(v|s)} \\ \Delta E_{b,i} &= \theta_b(1 - \tau_b) + (s - \mu)(\tau_b - \tau_i) \end{aligned} \tag{19}$$

ω équivaut donc une information bruitée sur $E_i(v|s) + \lambda_1 \Delta E_{b,i}$, qui est à son tour une vision erronée de $E_i(v|s)$ en raison de la présence d'investisseurs irrationnels sur le marché.

2 Impact de biais cognitifs sur l'efficience informationnelle

2.1 Interprétation de l'équilibre obtenu

Dans le cadre d'un marché de type walrasien, un commissaire-priseur est chargé de déterminer le prix, qui égalise l'offre et la demande. Nous avons formulé des hypothèses quant à l'existence d'informations *a priori* hétérogènes et d'une révision biaisée de ces croyances pour une partie des investisseurs.

La révision des croyances initiales grâce au signal reçu s, qu'elle soit exacte ou biaisée, va permettre aux agents informés et irrationnels de déterminer l'espérance de v, compte tenu du signal s et de sa précision supposée. Pour chaque prix proposé par le commissaire-priseur, les agents informés et irrationnels transmettent alors leur demande, qui est fonction des moments conditionnels d'ordre 1 et 2 de v^* et du prix proposé.

En raison des biais cognitifs, qui affectent la deuxième catégorie d'investisseurs, leur estimation de l'espérance et de la variance de v conditionnellement à leur signal est faussée, ce qui conduit à une fonction de demande également biaisée.

Parallèlement, des agents non-informés présents sur le marché tentent d'inférer l'information détenue par les agents informés, à savoir, l'information *a posteriori* $E_i(v|s)$. On peut considérer que ce processus d'apprentissage a lieu au cours de la période de ,,tâtonnement", nécessaire au commissaire-priseur pour déterminer le prix d'équilibre. En raison d'une offre aléatoire exogène d'actif risqué, les agents non-informés ne peuvent cependant inférer l'information $E_i(v|s)$ que sous la forme d'une distribution statistique : ω^*.

En l'absence d'investisseurs irrationnels, les agents non-informés infèrent l'information privée $E_i(v|s)$ de manière bruitée. Le bruit est dû à une offre exogène aléatoire d'actifs, mais d'espérance nulle. L'espérance de ω est égale à l'information privée $E_i(v|s)$, on peut considérer que le système de prix est efficient.

Si l'on introduit une fonction de demande biaisée, émanant d'investisseurs irrationnels, dans le processus de découverte du prix, elle n'influence non seulement le prix d'équilibre de manière purement mécanique, mais également le processus d'apprentissage des agents non-informés. L'information ω, inférée par ces derniers comporte alors une partie de l'erreur de prévision $\Delta E_{b,i}$ réalisée par les agents irrationnels.

Compte tenu de cette erreur de prévision $\Delta E_{b,i}$, l'information ω n'est plus centré sur l'information privée $E_i(v|s)$, et donne la naissance à une bulle de valeur moyenne $\lambda_1 E(DeltaE_{b,i})$ et de variance identique à la variance de ω.

2.2 Analyse du biais d'optimisme

Comme nous l'avons montré dans le point 1.2.2, le degré d'optimisme se traduit par la paramètre θ_b, qui est nul dans un contexte rationnel. Lorsqu'un investisseur est trop optimiste quant à la valeur de l'actif risqué, il réalise une erreur d'estimation de $E(v|s)$ égale à :

$$\begin{aligned} \Delta E_{b,i} &= E_b(v|s) - E_i(v|s) \\ &= \theta_b(1-\tau_i) \end{aligned} \tag{20}$$

Cette erreur d'estimation est positive lorsque l'investisseur est optimiste, et conduit ce dernier à transmettre des ordres plus importants aux commissaire-priseur pour un prix donné. Les agents non informés interprètent cette demande supplémentaire comme un signal plus favorable, propageant ainsi partiellement le biais cognitif.

2.3 Analyse du biais d'excès de confiance

On considère qu'un individu qui surévalue la qualité de ses informations ou encore ses capacités intellectuelles est victime du biais d',,excès de confiance". Dans notre modèle, ce biais se traduit par la sur-estimation de la précision du signal s reçu. L'investisseur irrationnel sous-estimera donc la variance du terme d'erreur ϵ, qui affecte le signal :

$$\vartheta_b < \vartheta_i \tag{21}$$

La précision relative perçue du signal τ_b augmente et entraîne une diminution de la variance conditionnelle de v. La surestimation de la précision du signal a donc pour conséquence l'augmentation de la propension à échanger $\frac{1}{a_b V_b(v|s)}$.

Mais la sur-estimation de la précision du signal entraîne également prise en compte trop importante du signal reçu dans le calcul des l'espérance conditionnelle de v, conduisant à une valeur $E_b(v|s)$ trop faible si le signal est inférieur à l'information *a priori*, trop élevé dans le cas contraire.

L'information inférée par les agents non-informés de la forme :

$$\omega = E_i(v|s) + \lambda_1 \Delta E_{b,i} + \lambda_2 x \ , \tag{22}$$

subit alors deux effets contraires. L'augmentation de la propension des agents irrationnels à échanger diminue la covariance entre ω et l'offre aléatoire exogène x et rend le système de prix plus efficient. Le poids trop important accordé au signal reçu augmente par contre le ,,mispricing" $\lambda_1 \Delta E_{b,i}$ et rend le système de prix directement dépendant du signal s reçu, diminuant ainsi son efficience. Selon les paramètres spécifiés et les proportions de chaque type d'agent, une sur- ou sous-évaluation de la qualité du signal peut donner lieu indifféremment à une amélioration ou une détérioration du degré d'efficience du système de prix.

Conclusion

Cet article a présenté une extension du modèle de Grossman et Stiglitz (1980) en intégrant des agents partiellement irrationnels. Le prix d'équilibre obtenu par confrontation de l'offre et de la demande d'actif risqué, reflète les biais cognitifs qui affectent une partie des agents informés de manière duale. D'une part, l'existence d'un biais cognitif conduit les agents irrationnels à modifier leur fonction de demande d'actif risqué, modifiant ainsi le prix d'équilibre, phénomène directement liée à la structure de marché walrasienne. Par ailleurs, nous montrons que les agents non-informés, qui tentent d'inférer l'information détenue par les informés, subissent partiellement les conséquences des biais cognitifs individuels.

L'extension du présent modèle à plusieurs périodes fait l'objet des travaux en cours et se veut suffisamment flexible pour permettre la modélisation de biais cognitifs plus complexes. Elle devra permettre une comparaison, voire une combinaison des modèles théoriques existants en Finance Comportementale dans un cadre unique et la spécification d'hypothèses testables de manière empirique.

Annexe mathématique

A Éléments de probabilité

Nous avons choisi de présenter ici quelques propriétés classiques des lois normales, qui ont été utilisées dans le calcul des moments conditionnels d'ordre 1 et 2.

Si l'on considère x et y, deux lois normales :

$$E(x|y) = E(x) + \frac{cov(x,y)}{var(y)}(y - E(y)) \tag{A.1}$$

$$V(x|y) = V(x)(1 - \frac{cov(x,y)^2}{V(x)V((y)}) \tag{A.2}$$

avec

$$cov(x,y) = \frac{1}{2}\left[V(x+y) - V(x) - V(y)\right] \tag{A.3}$$

B Détermination du prix d'équilibre

Ci-dessous figure le détail des calculs nécessaires pour déterminer la fonction de prix P ainsi que sa forme développée.

A partir de l'équation 15, on peut dériver les fonctions de demande des agents informés :

$$X_i = \frac{E(v|s_i, P) - P}{a_i V(v|s_i, P)}, \tag{B.1}$$

des investisseurs irrationnels :

$$X_b = \frac{E(v|s_b, P) - P}{a_b V(v|s_b, P)}, \tag{B.2}$$

et puis finalement la fonction de demande des investisseurs naïfs :

$$X_u = \frac{E(v|P) - P}{a_u V(v|\Phi_n)} \tag{B.3}$$

La condition d'équilibre du marché est l'égalité en offre et demande :

$$\pi_i X_i + \pi_b X_b + \pi_u X_u = x \tag{B.4}$$

Soit, en remplaçant les variables par leur expression :

$$\pi_i \frac{E(v|s_i) - P}{a_i V(v|s_i)} + \pi_b \frac{E(v|s_b) - P}{a_b V(v|s_b)} + \pi_u \frac{E(v|P) - P}{a_u V(v|\Phi_n)} = x \tag{B.5}$$

$$P = \frac{\frac{\pi_i E(v|s_i)}{a_i V(v|s_i)} + \frac{\pi_b E(v|s_b)}{a_b V(v|s_b)} + \frac{\pi_u E(v|P)}{a_u V(v|P)} - x}{\frac{\pi_i}{a_i V(v|s_i,P)} + \frac{\pi_b}{a_b V(v|s_b,P)} + \frac{\pi_u}{a_u V(v|P)}} \tag{B.6}$$

Rappelons l'équation 14 :

$$E_b(v|s) = \theta_b(1 - \tau_b) + (s - \mu)(\tau_b - \tau_i) + E_i(v|s) \tag{B.7}$$

Posons

$$\Delta E_{b,i} = E_b(v|s) - E_i(v|s) = \theta_b(1 - \tau_b) + (s - \mu)(\tau_b - \tau_i) \tag{B.8}$$

et

$$D = \frac{\pi_i E_i(v|s)}{a_i V_i(v|s)} + \frac{\pi_b E_b(v|s)}{a_b V_b(v|s)} - x \tag{B.9}$$

En remplaçant $E_b(v|s)$ dans B.9 avec B.8 :

$$D = \frac{\pi_i E_i(v|s)}{a_i V_i(v|s)} + \frac{\pi_b (E_i(v|s) + \Delta E_{b,i})}{a_b V_b(v|s)} - x \tag{B.10}$$

Définissons ω, tel que

$$D = \frac{\pi_i \omega}{a_i V_i(v|s)} + \frac{\pi_b \omega}{a_b V_b(v|s)} \tag{B.11}$$

Dès lors, on peut montrer que ω est de la forme :

$$\begin{aligned} &\omega = E_i(v|s) + \lambda_1 \Delta E_{b,i} + \lambda_2 x \\ &\qquad \text{pour tout } (\pi_i, \pi_b), \text{ tel que } \pi_i + \pi_b \neq 0 \text{ et} \\ &\omega = x \\ &\qquad \text{lorsque } \pi_i + \pi_b = 0 \end{aligned} \tag{B.12}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\pi_b a_i V_i(v|s)}{\pi_i a_b V_b(v|s) + \pi_b a_i V_i(v|s)} \\ \lambda_2 &= \frac{a_i V_i(v|s) a_b V_b(v|s)}{\pi_i a_b V_b(v|s) + \pi_b a_i V_i(v|s)} \\ \Delta E_{b,i} &= \theta_b(1 - \tau_b) + (s - \mu)(\tau_b - \tau_i) \end{aligned} \tag{B.13}$$

Le prix défini par

$$P = \frac{\frac{\pi_i \omega}{a_i V_i(v|s)} + \frac{\pi_b \omega}{a_b V_b(v|s)} + \frac{\pi_u E(v|\omega)}{a_u V(v|\omega)}}{\frac{\pi_i}{a_i V_i(v|s)} + \frac{\pi_b}{a_b V_b(v|s)} + \frac{\pi_u}{a_u V(v|\omega)}} \tag{B.14}$$

constitue alors un équilibre.

C Distributions des variables aléatoires

Nous avons réuni ici les caractéristiques des distribution des variables aléatoires rencontrées dans le texte, que ces caractéristiques soient réelles ou simplement perçues. Nous présentons également les propriétés de ω, qui constitue une information bruitée sur la prévision de v réalisée par les agents informés.

Dans un premier temps, nous rappelons les distribution de la vraie valeur de l'actif risqué v et du signal s, tel qu'il est perçu par les agents informés (indice $(\cdot)_i$).

Véritable distribution de v et de s

$$\begin{aligned} E(v) &= \mu \\ V(v) &= \sigma_v^2 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} E_i(s) &= \mu \\ V_i(s) &= \sigma_v^2 + \vartheta_i \end{aligned} \tag{C.2}$$

Distribution perçue de s

Les informés irrationnels (indice $(\cdot)_b$) perçoivent le signal s de manière erronée, supposant la distribution suivante :

$$\begin{aligned} E_b(s) &= \mu + \theta_b \\ V_b(s) &= \sigma_v^2 + \vartheta_b \end{aligned} \tag{C.3}$$

Moments conditionnels de v

$$
\begin{aligned}
E_i(v|s) &= \mu + \tau_i(s-\mu) \\
V_i(v|s) &= \sigma_v^2(1-\tau_i)
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

$$
\begin{aligned}
E_b(v|s) &= \mu + \tau_b(s-\mu) \\
V_b(v|s) &= \sigma_v^2(1-\tau_b)
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

Distribution de la prévision $E(v|s)$

$$
\begin{aligned}
E(E_i(v|s)) &= \mu \\
V(E_i(v|s)) &= \tau_i^2 V_i(s) \\
&= \tau_i \sigma_v^2
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

$$
\begin{aligned}
E(E_b(v|s)) &= \mu + \theta_b \\
V(E_b(v|s)) &= \tau_b^2 V_i(s)
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

Inférence de v par les naïfs en l'absence d'irrationnels

Comme nous l'avons mis en évidence, au lieu d'apprendre l'information $E_i(v|s)$, les investisseurs naïfs observent l'information ω.

En l'absence d'investisseurs irrationnels et lorsque $\pi_i \neq 0$, ω est égale à l'information $E_i(v|s)$, bruitée par l'offre d'actifs aléatoire x :

$$\omega = E_i(v|s) + \lambda_2' x \tag{C.8}$$

avec

$$\lambda_2' = \frac{a_i V_i(v|s)}{\pi_i} \tag{C.9}$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
E(\omega) &= E_i(\upsilon|s) = \mu \\
V(\omega) &= V(E_i(\upsilon|s)) + \left(\lambda_2'\right)^2 V(x) \\
&= \tau_i \sigma_\upsilon^2 + \left(\lambda_2'\right)^2 V(x)
\end{aligned}
\tag{C.10}
$$

L'information ω sert aux investisseurs naïfs pour réaliser une estimation de la vraie valeur υ et de sa variance :

$$
\begin{aligned}
E(\upsilon|\omega) &= E(\omega) + \frac{cov(\upsilon,\omega)}{V(\omega)}(\omega - E(\omega)) \\
V(\upsilon|\omega) &= V(\upsilon) - \frac{[cov(\upsilon,\omega)]^2}{V(\omega)}
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

avec

$$
cov(\upsilon,\omega) = \tau_i \sigma_\upsilon^2 \tag{C.12}
$$

Inférence de υ par les naïfs en présence d'agents irrationnels

Rappelons la forme de ω :

$$
\omega = E_i(\upsilon|s) + \lambda_1 \Delta E_{b,i} + \lambda_2 x \tag{C.13}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\pi_b a_i V_i(\upsilon|s)}{\pi_i a_b V_b(\upsilon|s) + \pi_b a_i V_i(\upsilon|s)} \\
\lambda_2 &= \frac{a_i V_i(\upsilon|s) a_b V_b(\upsilon|s)}{\pi_i a_b V_b(\upsilon|s) + \pi_b a_i V_i(\upsilon|s)} \\
\Delta E_{b,i} &= \theta_b(1-\tau_b) + (s-\mu)(\tau_b - \tau_i)
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
E(\omega) &= \mu + \lambda_1 \Delta E_{b,i} \\
&= \mu + \theta_b(1-\tau_b) \\
V(\omega) &= \left[\tau_i + \lambda_1(\tau_b - \tau_i)\right]^2 V_i(s) + \left(\lambda_2\right)^2 V(x) \\
&= \left[\tau_i + \lambda_1(\tau_b - \tau_i)\right]^2 \left(\sigma_\upsilon^2 + \vartheta_i\right) + \left(\lambda_2\right)^2 V(x)
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

d'où finalement

$$
\begin{aligned}
E(\upsilon|\omega) &= E(\omega) + \frac{cov(\upsilon,\omega)}{V(\omega)}(\omega - E(\omega)) \\
V(\upsilon|\omega) &= V(\upsilon) - \frac{[cov(\upsilon,\omega)]^2}{V(\omega)}
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

avec

$$
cov(\upsilon,\omega) = [\tau_i + \lambda_1(\tau_b - \tau_i)]\,\sigma_\upsilon^2 \tag{C.17}
$$

Références

Barberis, N., M. Huang, et T. Santos (1999) “Prospect Theory and Asset Prices”, *Working Paper 494*.

Barberis, N., A. Shleifer, et R. Vishny (1998) “A Model of Investor sentiment”, *Journal of Financial Economics*, 49 p. 307–343.

Barberis, N. et R. Thaler (2002) “A Survey of Behavioral Finance”, *NBER Working Paper No. w9222*.

Daniel, K., D. Hirshleifer, et A. Subrahmanyam (1998) “Investor psychology and security market under and overreactions”, *Journal of Finance 53*, 1839–1885.

De Bondt, W. et R. Thaler (1985) “Does the stock market overreact ?”, *Journal of Finance 40,3*, 793–805.

——— (1987) “Further evidence of investor overreaction and stock market seasonality”, *Journal of Finance 42*, 557–581.

Grossman, S. et J. Stiglitz (1980) “The American Economic Review”, *Journal of Finance 70*, 393–408.

Hong, H. et J. Stein (1998) “A Unified Theory of Underraction, Momentum Trading and Overreaction in Asset Markets”, *Working Paper*.

Kahneman, D. et A. Tversky (1979) “Prospect Theory : an Analysis of Decision under Risk”, *Econometrica 47*, 263–291.

Roger, P. (1991) “Les outils de la modélisation financière”. Presses Universitaires de France.

Tversky, A. et D. Kahneman (1992) “Advances in Prospect Theory : Cumulative Representation of Uncertainty”, *Journal of Risk and Uncertainty 5*, 297–323.