MODELOS DE HETEROGENEIDAD ESPACIAL

Coro Chasco Yrigoyen
Profesora de Economía Aplicada
Universidad Autónoma de Madrid

RESUMEN

La heterogeneidad espacial es uno de los efectos espaciales (además de la autocorrelación espacial, que es un efecto más conocido) que está relacionado con la diferenciación espacial o regional de las unidades geográficas. Se trata de un concepto que viene definido por la ausencia de estabilidad en el espacio del comportamiento humano o de otras relaciones en estudio. Esto implicará que, en los modelos espaciales, las formas funcionales y los parámetros variarán con la localización geográfica no siendo homogéneos para toda la matriz de datos. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, en los modelos econométricos estimados con datos de corte transversal procedentes de unidades espaciales no similares, como es el caso de regiones ricas del norte y regiones pobres del sur. A diferencia de lo que sucede con la dependencia espacial, el problema causado por la heterogeneidad espacial podría en gran parte ser resuelto mediante procedimientos de la econometría estándar (como el análisis cluster). Sin embargo, en algunos casos, la compleja interacción resultante de la estructura y los flujos espaciales pueden generar dependencia espacial combinada con heterogeneidad espacial, haciéndose altamente complicado distinguir entre ambos efectos. En este artículo, se presentan las especificaciones que, para este efecto de heterogeneidad espacial, se han presentado en la literatura, que se acompañan de algunos ejemplos y de una bibliografía muy útil para quien desee profundizar en alguno de estos temas.

PALABRAS CLAVE: Heterogeneidad espacial, efectos espaciales, econometría espacial.

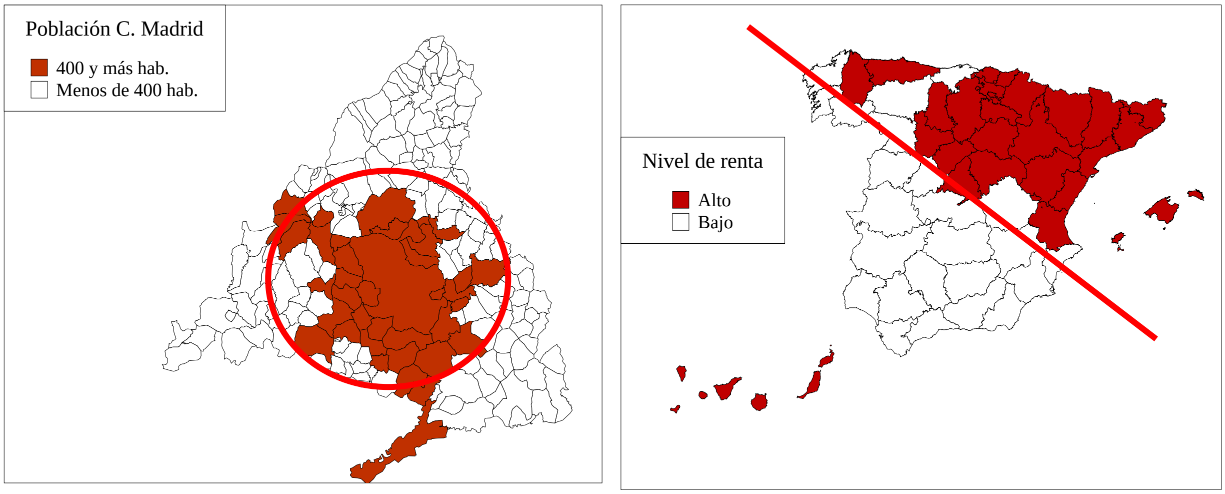
CLASIFICACIÓN JEL: C10, C21, C51.

I. INTRODUCCIÓN

La heterogeneidad espacial surge cuando se trabaja con unidades espaciales (países, regiones, municipios, secciones censales) en las que un fenómeno se distribuye de manera distinta sobre el espacio, lo que suele ocurrir con situaciones del tipo centro-periferia, norte-sur, este-oeste, etc., como podrían ser los casos que se presentan en la Figura 1. Por eso, este efecto espacial suele estar directamente relacionado con la localización geográfica, el área o cualquier otra característica de las unidades espaciales muestrales (Anselin, 1988, Moreno y Vayá, 2000, Chasco, 2003). Según Anselin (2001A)[1], la heterogeneidad espacial puede ser definida como "inestabilidad estructural en forma de varianza no constante de los residuos de una regresión (heteroscedasticidad) o en los coeficientes del modelo, que es posible abordar mediante técnicas de econometría tradicional o con herramientas propias de econometría espacial".

[1] La consideración de la heterogeneidad espacial como un segundo efecto espacial, junto con la dependencia, fue inicialmente propuesta por Anselin (1988).

Figura 1. Ejemplos de heterogeneidad espacial en situaciones centro-periferia (izquierda) y norte-Sur (derecha)



Fuente: Elaboración propia a partir del SIG MapInfo Professional.

Como el efecto de heterogeneidad espacial puede ser tratado utilizando técnicas econométricas tradicionales, los estudios sobre econometría espacial dedican una menor atención a este tema que a la problemática en torno a la autocorrelación espacial. Sin embargo, como indica Anselin (2001A), hay tres razones por las que se debería analizar este efecto de heterogeneidad a través de técnicas propias de econometría espacial:

- En primer lugar, la estructura que subyace en la inestabilidad espacial es de carácter geográfico, en el sentido de que la localización de las observaciones es fundamental para determinar la forma o especificación de dicha variabilidad. Éste sería, por ejemplo, el caso de la heteroscedasticidad de grupos ("groupwise"), que podría ser modelizada a través de tantos valores de la varianza de la perturbación aleatoria como distintos grupos geográficos compactos puedan derivarse de los datos.

- En segundo lugar, dado que la estructura es espacial, la heterogeneidad suele producirse conjuntamente con el problema de autocorrelación espacial, no siendo ya adecuadas las herramientas de la econometría tradicional, dado que los contrastes habituales de heteroscedasticidad pueden estar sesgados en un contexto espacial.

- Por último, en tercer lugar, en un modelo de regresión de corte transversal, ambos efectos de autocorrelación y heterogeneidad espacial pueden ser, desde una óptica meramente observacional, totalmente equivalentes. Así, por ejemplo, un "cluster" o agrupamiento espacial (observado en localizaciones muy próximas) de los residuos con valores extremos podría ser interpretado como un problema de heterogeneidad espacial (heteroscedasticidad de grupos o "groupwise"), o también como un efecto de autocorrelación espacial. Por eso, deben estructurarse perfectamente ambos efectos espaciales para identificar correctamente los parámetros de un modelo con estos problemas y nunca considerar un aspecto independientemente del otro.

De la citada definición de Anselin (2001A), se deduce que en un modelo de regresión lineal pueden distinguirse diversas especificaciones para el efecto de heterogeneidad espacial, según que se manifieste como heteroscedasticidad o como inestabilidad estructural paramétrica.

II. ESPECIFICACIÓN DE LA HETEROSCEDASTICIDAD ESPACIAL

La heteroscedasticidad consiste en la ausencia de estabilidad en la dispersión de un fenómeno, como sucede muchas veces con los residuos de una regresión y puede representarse como:

$$Var(u_i) = \sigma_i^2 \qquad \textit{Eq. 1.}$$

donde σ_i^2: indica que la varianza de la perturbación aleatoria es diferente para cada observación muestral *i*.

Las causas de la existencia de heteroscedasticidad en un modelo de regresión espacial serían las siguientes:

- Utlización de datos procedentes de unidades espaciales irregulares, es decir, con diferente área o extensión territorial, como es el caso de las divisiones político-administrativas (países, regiones, provincias, municipios, secciones censales,...).

- Tratamiento de unidades geográficas en las que un fenómeno se distribuye de manera desigual en el espacio, sobre todo, cuando se utilizan datos de regiones extremas (centro-periferia, norte-sur, este-oeste) o cuando se trabaja con datos referidos tanto a antiguos centros industriales como a zonas de nuevo asentamiento, provincias urbanas y provincias rurales, secciones censales del centro de una ciudad y secciones del extrarradio, etc. (Anselin, 2001A).

- Causas de tipo sociológico, como la existencia de diversos gustos o actitudes de la población, o político, cuando en la zona analizada se producen diferentes administraciones o políticas regionales que llevan a respuestas diferentes ante un mismo estímulo (Moreno y Vayá, 2000).

- Además, a estas situaciones hay que añadir las causas habituales del problema de heteroscedasticidad en los modelos de regresión lineal: omisión de variables relevantes u otro tipo de especificación errónea del modelo, que producen en el término de la perturbación aleatoria una varianza no constante.

- Por último, cabe señalar que algunas causas que provocan la heterogeneidad espacial pueden también originar la aparición de autocorrelación espacial, (especificaciones erróneas o errores de medida, sobre todo), siendo necesaria la contrastación de ambos efectos conjuntamente (Anselin, 1988).

El modelo general de regresión espacial considera también la posibilidad de que la perturbación aleatoria presente problemas de heteroscedasticidad (ver Chasco, 2003; pag. 100 y ss.). Efectivamente, en la expresión formal del mismo[2]:

$$\begin{aligned} & y = \rho W_1 y + X\beta_1 + W_2 R\beta_2 + u \\ & u = \lambda W_3 u + \varepsilon \\ & \varepsilon \sim N(0,\Omega) \quad ; \quad \Omega_{ii} = h_i(Z\alpha) \quad ; \quad h_i > 0 \end{aligned} \qquad \textit{Eq. 2.}$$

u es un vector *(N,1)* de perturbaciones aleatorias autorregresivas y heteroscedásticas, siendo los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianzas (Ω) función de $P+1$ variables exógenas de *Z* y α, un vector *(P,1)* asociado a los términos no constantes de la matriz *Z*.

Si se excluye de esta especificación todas las referencias a la dependencia espacial, se obtendrá la especificación del **modelo del error heteroscedástico**, que es un caso caso particular de un modelo de perturbaciones aleatorias no esféricas. En este modelo, la varianza de la perturbación aleatoria no es ya una constante, sino que varía con cada observación *i*:

$$\begin{aligned} & y = X\beta + u \\ & Var(u_i) = \sigma_i^2 I \\ & E[uu'] = \Omega \end{aligned} \qquad \textit{Eq. 3.}$$

donde *u* es el vector de perturbaciones aleatorias *(N,1)*, con varianza no constante para cada observación *i*, y Ω una matriz diagonal de varianzas y covarianzas de *u*. Para que este modelo sea identificable, la varianza no constante debe tener alguna estructura que, en el modelo general, queda más o menos sin determinar y que podría especificarse como heteroscedasticidad aditiva, de coeficientes aleatorios y de grupos.

II.1. Modelo de heteroscedasticidad aditiva

En muchas ocasiones se recurre a una especificación común denominada "aditiva", en la que la varianza de la perturbación aleatoria se expresa como una función lineal de un conjunto de *Z* variables heteroscedásticas, que pueden coincidir o no con las variables explicativas, que son las que, a su vez, producen los problemas de heteroscedasticidad en el modelo, del modo siguiente:

$$Var(u) = Z \cdot \gamma \qquad \textit{Eq. 4.}$$

[2] En esta expresión, *y* es el vector de observaciones de la variable endógena; *X* es la matriz de variables exógenas; W_1, W_2, W_3 son las matrices de pesos espaciales de la variable endógena, exógenas y perturbación aleatoria, respectivamente; ρ, λ son coeficientes autorregresivos espaciales; β_1, β_2 son los coeficientes de las variables exógenas; *R* es la matriz de variables exógenas espacialmente retardadas.

donde *Var(u)*: vector columna *(N,1)* de varianzas de la perturbación aleatoria
Z: matriz *(N,P)* de variables heterocedásticas
γ: correspondiente vector de coeficientes.

Normalmente, la primera variable es un término constante, de forma que un test sencillo de heteroscedasticidad puede ser formulado como un contraste de significación conjunto del resto de coeficientes y la constante, en sí misma, sería la varianza homoscedástica de la perturbación aleatoria. Éste es el principio sobre el que se fundamenta el contraste de Breusch-Pagan para la heteroscedasticidad.

II.2. Modelo de heteroscedasticidad de coeficientes aleatorios

En este modelo, la varianza de la perturbación aleatoria es función, en concreto, del cuadrado de *Z* variables explicativas del modelo (todas o parte de ellas), con problemas de heteroscedasticidad y, por tanto, causantes de este problema en el modelo:

$$Var(u) = Z^2 \cdot \gamma \qquad \textit{Eq. 5.}$$

siendo *Z* el grupo de variables explicativas heteroscedásticas. En este caso, el término independiente en la *Eq. 5*, como en la *Eq. 4*, sería la varianza constante de la perturbación aleatoria y el vector γ de coeficientes podría ser interpretado como la varianza asociada al estimador aleatorio correspondiente del modelo. Por tanto, este coeficiente debería ser positivo, cosa que no siempre sucede en la práctica, cuando la especificación de este modelo es incorrecta (ver en Amemiya, 1985 más información sobre este modelo y su proceso de estimación en 3 etapas por el método de mínimos cuadrados factibles).

II.3. Modelo de heteroscedasticidad de grupos ("groupwise")

En otras ocasiones, las Z variables heteroscedásticas, causantes de la variabilidad de la varianza de la perturbación aleatoria en un modelo de regresión, pueden ser variables categóricas, correspondientes a un determinado número de regímenes espaciales (países ricos del norte, municipios de la periferia, etc.), que recogen un cambio estructural en la muestra de observaciones. Es decir, en cada estructura o régimen espacial, la varianza del error sería distinta, aunque constante dentro de cada una de ellas, por lo que se podría llegar a concluir que la heteroscedasticidad detectada tiene su origen en la existencia de diversos regímenes espaciales.

En esta situación, la varianza de la perturbación aleatoria podría ser estimada directamente a partir de los residuos de cada estructura espacial, siempre y cuando exista, en cada una de ellas, un número suficiente de observaciones. Las estructuras espaciales se construyen a partir de una variable indicador categórica que adopta valores enteros diferentes para cada estructura. A diferencia de las otras dos especificaciones, en este modelo no se incluye un término constante.

III. MODELOS DE INESTABILIDAD PARAMÉTRICA

Un segundo tipo de modelos de heterogeneidad espacial viene dado por la llamada inestabilidad paramétrica espacial, que consiste en la falta de estabilidad sobre el espacio (variabilidad espacial) de una variable. En este tipo de situaciones, tanto la forma funcional como los parámetros de la regresión pueden variar según la localización geográfica siendo, por tanto, no homogéneos en toda la muestra de datos. Es probable que este efecto surja, por ejemplo, cuando se utilizan datos de regiones extremas, como pueden ser las regiones ricas del norte europeo y las pobres del sur, para explicar, por ejemplo, un fenómeno económico en el que se produce un esquema norte-sur o centro-periferia. Este problema, según Moreno y Vayá (2000) podría formalizarse de la siguiente manera:

$$y_i = f_i\left(X_i \beta_i + \varepsilon_i\right) \qquad \textit{Eq. 6.}$$

siendo i: una observación, donde $i = 1, 2, ..., N$ puntos en el espacio geográfico
y_i: variable dependiente en la localización i
X_i: vector *(1,K)* de K variables explicativas
β_i: vector *(K,1)* de parámetros asociados a las variables explicativas
ε_i. perturbación aleatoria

Es decir, de este modelo se deriva que existe una relación funcional concreta para explicar el valor de la variable endógena en cada localización i, produciéndose el llamado problema de los parámetros incidentales ("incidental parameter problem"), que consiste en la imposibilidad evidente de estimar el grupo de N vectores de parámetros β_i con una muestra de N observaciones: es decir, la matriz de datos carece de información suficiente con la que obtener una estimación para cada observación espacial. Esta situación suele también denominarse "heterogeneidad espacial extrema" (Anselin, 1988)[3].

Por eso, para poder proceder con un análisis de este tipo, será necesaria una especificación más simple de la variabilidad que sufre en el espacio un determinado fenómeno. Es decir, será necesario conocer de antemano la especificación propia de la variabilidad espacial del fenómeno a explicar y contrastar si dicha especificación es consistente con la información de los datos muestrales (LeSage, 1999). Además, hay que tener en cuenta que este fenómeno de inestabilidad estructural suele presentarse de dos formas, discreta o continua (Anselin, 1999), según que los parámetros del modelo adopten valores diferentes en cada observación muestral o sólo en un número limitado de regímenes o estructuras espaciales, lo que originará modelos de diferente especificación.

3.1. Modelos con inestabilidad paramétrica continua

En algunas ocasiones, los parámetros de un modelo de regresión experimentan una deriva espacial continua. Es decir, los coeficientes asociados a las variables explicativas pueden adoptar un valor diferente, o bien para cada observación muestral, como en el

[3] El problema de la predicción-extrapolación de datos espaciales suele ser considerado como un caso particular de la heterogeneidad extrema (Chasco, 2003).

modelo de parámetros aleatorios (Hildreth-Houck, 1968), o bien según unas variables de expansión (auxiliares), que pueden ser o no espaciales, como en el modelo de expansión espacial (Casseti, 1972, 1986, 1997A y B) o las regresiones ponderadas geográficamente, de Fotheringham *et al.* (1998) y Brudson *et al*. (1999).

- **Modelo espacial de parámetros aleatorios, de Hildreth-Houck**

El caso de deriva espacial continua de los parámetros, propuesta por Hildreth y Houck (1968), daría lugar a un modelo con la siguiente especificación:

$$y_i = X_i'\beta_i \qquad \textit{Eq. 7.}$$

donde X_i': vector fila *(1,K)* de variables explicativas

β_i: vector columna *(K,1)* de coeficientes para cada observación *i*.

En el modelo de parámetros aleatorios, en concreto, se desconoce la forma funcional de dicha variación paramétrica, por lo que el vector β_i se estima como la suma de dos elementos:

$$\beta_i = \beta + \mu_i \qquad \textit{Eq. 8.}$$

siendo β: constante

μ_i: perturbación aleatoria de distribución normal, con media nula y matriz de covarianzas que puede ser diagonal, en el caso particular de no existir correlación entre los términos de error y los coeficientes del modelo.

La sustitución del vector de coeficientes en el modelo general da lugar al siguiente modelo:

$$\begin{aligned} y_i &= X_i'\beta + u_i \\ u_i &= X_i'\mu_i \begin{cases} E(u_i) = 0 \\ V(u_i) = X_i' \sum_i X_i \end{cases} \end{aligned} \qquad \textit{Eq. 9.}$$

Como puede observarse, el modelo de coeficientes aleatorios es, en realidad, un caso particular de la heteroscedasticidad de coeficientes aleatorios, en el que la varianza de las perturbaciones es función de las variables exógenas (ver ejemplo en Anselin, 1988A).

En este tipo de modelos, el efecto de dependencia espacial podría estar también presente en forma de proceso espacial autorregresivo, SAR(1) en la perturbación aleatoria μ_i, definida inicialmente como ruido blanco, de forma que la perturbación general del modelo u_i presenta, a la vez, autocorrelación espacial y heteroscedasticidad. Es decir, la dependencia espacial estaría presente en la desviación que experimentan los parámetros β_i en torno a la media común β, del modo siguiente:

$$\mu_i = \left(\beta_i - \beta\right) = \lambda \sum_{j \neq i} w_{ij} \left(\beta_j - \beta\right) + \varepsilon_i$$
$$\varepsilon \sim N\left(0, \sigma^2 I\right) \qquad \textit{Eq. 10.}$$

O también:

$$\mu_i = \lambda \sum_{j \neq i} w_{ij} \mu_j + \varepsilon_i \qquad \textit{Eq. 11.}$$

correspondiéndose el subíndice *j* con las unidades "vecinas" a *i*, definidas por los elementos no nulos w_{ij} de la matriz W de pesos espaciales. Según esto, la perturbación aleatoria, μ, correspondiente al vector de parámetros no constantes β_i, se distribuye como un proceso espacial autorregresivo de orden uno, SAR(1), del modo siguiente:

$$\mu = \lambda W\mu + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \mu = \left(I - \lambda W\right)^{-1} \varepsilon \qquad \textit{Eq. 12.}$$

siendo la matriz inversa $(I - \lambda W)^{-1}$ que, para su más fácil notación se designará como a_{ij}, el multiplicador espacial asociado al término autorregresivo que expresa tanto la naturaleza conjunta (simultánea) de la dependencia espacial, como la existencia de una relación funcional entre ambas perturbaciones aleatorias que, en términos de Anselin (2001B), es de tipo global.

En este caso, la expresión de la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación aleatoria general *u* será compleja y puede obtienerse a partir de la especificación de dicha perturbación, con problemas de heteroscedasticidad y autocorrelación espacial:

$$u_i = X'\mu_i$$
$$u_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \varepsilon_j X_i \qquad \textit{Eq. 13.}$$

Por un lado, los términos de la varianza de la perturbación aleatoria general, $Var(u_i)$, serán función de la varianza constante de la perturbación aleatoria esférica σ_ε^2, aunque verán agravado su problema de heteroscedasticidad, debido a la presencia del multiplicador espacial autorregresivo a_{ij}. Por otro lado, los términos de la covarianza de la perturbación general, $Cov(u_i)$, son no nulos debido a la existencia de autocorrelación espacial entre los errores pertenecientes a unidades espaciales distintas.

Es decir, la estimación de un modelo espacial de parámetros aleatorios debe tener en cuenta correctamente estas circunstancias en la perturbación aleatoria pues, en caso contrario, los estimadores $\hat{\beta}$ podrían no tener buenas propiedades. En este caso, el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) no sería correcto, por lo que habría que recurrir a la estimación por máxima-verosimilitud (MV) o por mínimos cuadrados generalizados (MCG) iterativos.

Una especificación alternativa para la dependencia espacial sería la introducción de un retardo espacial de la variable endógena, como en el modelo del retardo espacial o modelo de externalidades globales modelizadas y no modelizadas (Anselin 2001B).

$$y = \rho\ Wy + X\beta + u$$
$$y = (I - \rho\ W)^{-1} X\beta + (I - \rho\ W)^{-1} u \qquad \textit{Eq. 14.}$$

siendo ρ el coeficiente espacial autorregresivo correspondiente a la variable dependiente.

- **Modelo de expansión espacial, de Casetti**

En el caso del modelo de expansión espacial, originalmente propuesto por Casetti (1972), la deriva continua en los parámetros se formula en función de un conjunto de variables auxiliares, llamadas variables de expansión, que pueden ser de tipo no espacial (Jones y Casseti, 1992; Moreno *et al.*, 1997). Hace unos años, este paradigma de la expansión se ha extendido hasta llegar a ser un esquema general para el desarrollo de los modelos (Casetti, 1986, 1997A y B; Casetti y Jones, 1988; Jones y Casetti, 1992)[4]. Una formulación general, consistiría en considerar cada coeficiente de la regresión β_j como función lineal de un conjunto de variables de expansión, $z_1, z_2, ..., z_m$, del modo siguiente:

$$\beta_j = \gamma_{0j} + \gamma_{1j} z_1 + \gamma_{2j} z_2 + ... + \gamma_{mj} z_m \qquad \textit{Eq. 15.}$$

La sustitución de los coeficientes expandidos en el modelo general, produce un incremento de m nuevas variables en el mismo, consistentes en el producto de las variables explicativas por cada una de las variables de expansión: $x_j z_1$, $x_j z_2$, etc. Cuando se demuestra que los coeficientes de un modelo dependen directamente del espacio geográfico, éstos podrían expresarse como:

$$\beta_j = \gamma_0 + \gamma_1 m_j + \gamma_2 p_j \qquad \textit{Eq. 16.}$$

siendo *m*: coordenada geográfica de longitud (tendencia este-oeste)[5]
p: coordenada geográfica de latitud (tendencia norte-sur)[6]

---

[4] Ver las especificaciones propuestas por Anselin (1988A) y Moreno y Vayá (2000) para este tipo de modelos. Asimismo, también son interesantes Kristensen (1998), Sandberg y Johanson (2001).

[5] La coordenada de longitud es una medida de localización geográfica, que suele medirse en grados hacia el este/oeste del meridiano cero o de Greenwich. Sobre un mapa es posible dibujar las líneas de longitud como líneas verticales (meridianos), perpendiculares al ecuador y con interección en ambos polos (no paralelas, dada la forma esférica de la Tierra), con un recorrido de 0,0º (meridiano cero) a +180,0º y –180,0º. Suele ser denominada coordenada *X* por determinar, en un eje horizontal, la localización este-oeste de un punto.

[6] La coordenada de latitud es una medida de localización geográfica, que suele medirse en grados sobre o bajo el ecuador. En un mapa es posible dibujar las líneas de latitud como líneas horizontales (paralelos) con un recorrido de 0,0º (ecuador) a +90,0º (polo norte) y –90,0º (polo sur). Suele ser denominada coordenada *Y* por determinar, en un eje vertical, la localización norte-sur de un punto.

La sustitución de los coeficientes en un modelo que sólo contiene una variable explicativa *x* daría lugar a la siguiente especificación:

$$
\begin{aligned}
&y = \beta_0 + \beta_1 x + u \\
&y = \beta_0 + \left(\gamma_0 + \gamma_1 m + \gamma_2 p\right) x + u \\
&\begin{cases} y = \beta_0 + \gamma_0 x + \gamma_1 \left(m \cdot x\right) + \gamma_2 \left(p \cdot x\right) + u \\ u \sim N\left(0, \sigma^2 I\right) \end{cases}
\end{aligned}
\qquad \textit{Eq. 17.}
$$

Este modelo considera que la perturbación aleatoria *u* es esférica. Sin embargo, esto puede no ser así en la práctica, debido a la dificultad de mantener la hipótesis de existencia de una relación exacta entre los coeficientes del modelo y las variables de expansión. De rechazarse esta hipótesis, sería necesario considerar un término aleatorio en la expansión de los coeficientes que, por ejemplo, en la anterior expresión simplificada, sería:

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 m + \gamma_2 p + \mu \\
&\mu \sim N\left(0, \sigma^2 I\right)
\end{aligned}
\qquad \textit{Eq. 18.}
$$

lo que daría lugar a un modelo diferente:

$$
\begin{aligned}
&y = \beta_0 + \left(\gamma_0 + \gamma_1 m + \gamma_2 p + \mu\right) x + u \\
&y = \beta_0 + \gamma_0 x + \gamma_1 \left(m \cdot x\right) + \gamma_2 \left(p \cdot x\right) + \omega
\end{aligned}
\qquad \textit{Eq. 19.}
$$

siendo $\omega = \mu.x + u$, una perturbación aleatoria con problemas de heteroscedasticidad, dado que su correspondiente varianza es función de la variable explicativa *x*:

$$
\begin{aligned}
&Var\left(\omega\right) = \sigma_\mu^2 \cdot x^2 + \sigma_u^2 \\
&u \sim N\left(0, \sigma_u^2\right) \\
&\mu \sim N\left(0, \sigma_\mu^2\right)
\end{aligned}
\qquad \textit{Eq. 20.}
$$

suponiendo también independencia entre las perturbaciones aleatorias del modelo original *u* y del modelo de expansión de los coeficientes μ, cosa que puede mantenerse en la práctica.

Por último, también cabe indicar que las variables de expansión pueden ser cualquier conjunto de variables (espaciales y no espaciales), incluidas las expresiones polinomiales propias de la superficie tendencial, como se verá a continuación.

- **Modelo de superficie tendencial**

Un modelo de superficie tendencial es un modelo de regresión espacial cuyas variables explicativas son los elementos de un polinomio de las coordenadas terrestres de longitud *m* y latitud *p*, a través de las cuales es posible conocer la localización exacta de una observación *i* en el espacio geográfico como el par (m_i,p_i). En el caso de que dicha observación *i* no fuera un punto sino un polígono (tal como se define en Chasco, 2003; pag. 17), este último podría representarse a través de su correspondiente centroide[7].

Por ejemplo, un modelo de superficie tendencial de 2º orden tendría la siguiente especificación:

$$y = \alpha + \beta_1 m + \beta_2 p + \beta_3 m^2 + \beta_4 p^2 + \beta_6 m \cdot p + u \qquad \textit{Eq. 21.}$$

Como ya se ha indicado, las variables explicativas (m,p) se corresponden con las coordenadas terrestres. Además, α es el término independiente, β_1 a β_6 son los coeficientes de la regresión en cada término del polinomio, siendo *u*, la perturbación aleatoria.

Este modelo es similar a los métodos de ajuste de tendencias temporales, por lo que, al igual que en estos casos, resulta particularmente útil para eliminar tendencias espaciales de gran escala. Otra aplicación común de este modelo consiste en la posibilidad de obtención de interpolaciones espaciales, dado que la superficie tendencial es función únicamente de una localización de puntos (sus coordenadas), pudiendo conocerse los valores de predicción para cualquier localización para la que se conozcan sus coordenadas.

Un aspecto a tener en cuenta al interpretar los resultados de la estimación de este tipo de modelos es el alto grado de multicolinealidad que suele producirse, debido a la gran relación funcional existente entre los distintos términos del polinomio. Como consecuencia, no debería utilizarse este modelo para otros fines fuera del alisado, filtrado o interpolación de datos (ver los modelos propuestos por López y Palacios, 2000; López *et al.*, 2001).

- **Modelo de regresiones ponderadas geográficamente (RPG), de Fotheringham, Charlton y Brundsdon**

El modelo RPG pretende también, como en los casos anteriores, recoger adecuadamente el fenómeno de inestabilidad paramétrica continua sobre el espacio geográfico, mediante un modelo estimado por mínimos cuadrados ponderados, siendo los pesos una función de la distancia entre cada punto y el resto. Así, en el modelo siguiente:

$$y_i = X_i \beta_i + u_i \qquad \textit{Eq. 22.}$$

el vector de parámetros β_i es obtenido a través de un método de estimación de mínimos cuadrados ponderados, de la siguiente forma:

$$\hat{\beta}_i = \left[X' W_i X\right]^{-1} X' W_i y \qquad \textit{Eq. 23.}$$

siendo W_i una matriz diagonal de orden (N,N) en la que los elementos son nulos fuera de la diagonal principal, mientras que en la misma se sitúan las ponderaciones w_{ij} obtenidas

[7] Se entiende por centroide el centro geográfico de un polígono que, en la mayoría de los casos, se encuentra dentro de los límites del mismo, a mitad de camino entre los extremos norte-sur, este-oeste de dicha región.

como una función de la distancia entre dicha observación i y el resto. Por ejemplo, en Fotheringham *et al.* (1997), se sugiere la siguiente especificación:

$$w_{ij} = e^{-\alpha \cdot d_{ij}^2} \qquad \textit{Eq. 24.}$$

siendo α: parámetro que expresa la caída exponencial de la distancia entre dos puntos
d_{ij}: distancia entre los puntos i,j.

Así construidos, los pesos w_{ij} de la matriz W_i correspondientes al punto i serán mayores para aquellas localizaciones situadas más próximas a i. Esto supone que cada ecuación del modelo mide las relaciones inherentes al modelo alrededor de cada punto i. Asimismo, la posibilidad de obtener la desviación estándar de las N estimaciones de los parámetros del modelo permitirá analizar el alcance de la no estacionariedad en las relaciones entre X e y.

Por otro lado, los autores señalan que con las RPG, no sólo es posible obtener diferentes estimadores, sino también distintos contrastes, como la t de Student o medidas de bondad del ajuste (R^2), para cada localización geográfica. Estas últimas resultan muy útiles para explorar la posibilidad de añadir nuevas variables explicativas al modelo.

3.2. Modelos con inestabilidad paramétrica discreta

Por su parte, la inestabilidad paramétrica discreta ("spatial regimes") es también un caso particular de inestabilidad paramétrica que evita una estimación global de coeficientes diferentes para toda la muestra de datos (N) mediante la división de la misma en un número limitado (s) de estructuras diferentes (siendo $s<N$), superando el problema de los parámetros incidentales (falta de grados de libertad) y obteniendo estimaciones eficientes.

Pueden distinguirse dos especificaciones para la inestabilidad paramétrica discreta, el modelo ANOVA espacial (SANOVA), aplicable más bien en un contexto de análisis exploratorio univariante, y el modelo de regresiones cambiantes ("switching regressions").

➢ Modelo ANOVA espacial (SANOVA)

El análisis espacial de la varianza, ANOVA espacial (Griffith, 1992), consiste en la aplicación del ANOVA tradicional al contexto espacial, con el objetivo de contrastar si la media de una variable determinada difiere de forma significativa entre diferentes grupos de datos (estructuras o regímenes espaciales). Por ejemplo, es evidente que la distribución de variables económicas, como la renta disponible o el PIB, presenta medias diferentes en el grupo de provincias españolas localizadas en las dos submitades, norte y sur, peninsulares.

El SANOVA mide el grado en que estas diferencias en las medias por grupos o zonas del espacio es, de hecho, significativa o puramente casual. En términos propios, el objetivo de este tipo de análisis se centra en encontrar diferencias significativas en el valor medio de una variable cuando ésta es sometida a diferentes "tratamientos" que, en estos casos, son de tipo geográfico, por cuanto engloban diversas sub-zonas.

Este procedimiento parte de la especificación del siguiente modelo de regresión:

$$y = \beta_0 + \beta_1 f + u \qquad u \sim N\left(0, \sigma^2 I\right) \qquad \textit{Eq. 25.}$$

donde y: variable dependiente (sometida a diferentes tratamientos espaciales)
f: variable categórica que define los diferentes tratamientos (estructuras)
β_0, β_1: coeficientes a estimar
u: perturbación aleatoria esférica.

En el caso frecuente de que la variable tratamiento categórica (f) sea una variable ficticia ("dummy") binaria, formada por ceros y unos, el valor estimado para el término constante (β_0) será el valor medio de las regiones que muestren un *0* en la variable ficticia; por su parte, el coeficiente correspondiente a dicha variable ficticia (β_1), reflejará la diferencia entre la media anterior y la derivada del subgrupo de regiones con valor 1.

De este modo, un valor alto significativo en el coeficiente estimado β_1 indicará la existencia de una fuerte discrepancia entre las medias de las dos estructuras espaciales definidas, justificando un tratamiento diferencial de ambos casos como consencuencia de la inestabilidad detectada.

Todos estos resultados están totalmente condicionados al cumplimiento de las hipótesis de homoscedasticidad y no autocorrelación espacial en la perturbación aleatoria que, en caso de no cumplirse, producirá estimaciones incorrectas, a no ser que el modelo sea convenientemente reespecificado. Por ejemplo, en el caso de haberse contrastado en la estimación MCO la existencia de autocorrelación espacial en la variable endógena, el modelo SANOVA anterior podría ser especificado como un modelo del retardo espacial:

$$y = \rho\, Wy + \beta_0 + \beta_1 f + u \qquad u \approx N\left(0, \sigma^2 I\right) \qquad \textit{Eq. 26.}$$

pudiendo producirse alteraciones, más o menos importantes, en el valor y la significación de los estimadores de los parámetros β_0, β_1.

- **Modelo espacial de regresiones cambiantes ("switching regressions")**

Otra posibilidad de introducir la heterogeneidad en un modelo de regresión espacial y evitar una estimación global, sería una solución de regresiones espaciales cambiantes o "switching regressions", al estilo de la propuesta por Quandt (1958), que estima tantos valores para los coeficientes de una regresión como estructuras o regímenes espaciales se establezcan en la muestra total de observaciones.

Por ejemplo, si se establecen 2 estructuras, siguiendo el valor de una variable indicador (ficticia) s, tanto el término constante como el resto de parámetros del modelo adoptarán 2 diferentes conjuntos de valores, según la estructura:

$y_1 = X_1\beta_1 + u_1$, para $d=0$
$y_2 = X_2\beta_2 + u_2$, para $d=1$

donde y_1 y X_1 son subconjuntos de variables dependientes y explicativas correspondientes a la primera estructura, e y_2 y X_2 son los de la segunda estructura, siendo β_1, β_2 los coeficientes de la regresión, y u_1, u_2 los vectores de las perturbaciones aleatorias. Este modelo puede también expresarse, de una forma conjunta, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \qquad \textit{Eq. 27.}$$
$$y^* = X^*\beta^* + u^*$$

IV. CONCLUSIONES

La heterogeneidad espacial surge cuando se trabaja con unidades espaciales en las que un fenómeno se distribuye de manera distinta sobre el espacio. Por eso, este efecto espacial suele estar directamente relacionado con la localización geográfica, el área o cualquier otra característica de las unidades espaciales muestrales. Dado que este efecto de heterogeneidad espacial suele producirse conjuntamente con el efecto de autocorrelación espacial, las herramientas que la econometría tradicional utiliza para el tratamiento de la heteroscedasticidad no resultan ya adecuadas (los contrastes de heteroscedasticidad utilizados habitualmente sueden estar sesgados en un contexto espacial).

En este artículo se han presentado las diversas especificaciones que para el efecto de heterogeneidad espacial que pueden distinguirse en un modelo de regresión lineal. Por un lado, el modelo del error heteroscedástico (que, a su vez, puede especificarse de forma aditiva, de coeficientes aleatorios y de grupos) y, por otro, los modelos de inestabilidad estructural paramétrica, que vienen dados por la llamada inestabilidad paramétrica espacial o falta de estabilidad sobre el espacio (variabilidad espacial) de una variable. Se trata aún de modelos poco conocidos, cuya difusión y utilización debería impulsarse en el futuro.

V. BIBLIOGRAFÍA

. AMEMIYA, T. (1985), *"Advanced Econometrics*". Cambridge, MA.: Harvard University Press.
. ANSELIN, L. (1988), *"Spatial econometrics: methods and models"*. Kluwer Academic Publishers.
. ANSELIN, L. (1999B),*"Spatial Data Analysis with SpaceStat™ and ArcView®. Workbook (3rd Edition)"*. Department of Agricultural and Consumer Economics, University of Illinois, Urbana, IL 61801.

. ANSELIN, L. (2001A), *“Spatial econometrics”*. En “A companion to theoretical econometrics”, ed. Baltagi, Oxford: Basil Blackwell; pp. 310-330.
. ANSELIN, L. (2001B), *“Spatial externalities, spatial multipliers and spatial econometrics”*. Discussion Paper del Regional Economics Applications Laboratory, REAL 01-T-11.
. BRUNSDON, C., A.S. FOTHERINGHAM y M.E. CHARLTON (1998), *“An investigation of methods for visualizing highly multivariate datasets”*. En Unwin, D. y P. Fisher (eds), “Case studies of visualization in the social sciences, advisory group on computer graphics”; pp. 55-79.
. CASETTI, E. (1972), *“Generating models by the expansion method: applications to geographical research”*. Geographical Analysis, 4; pp. 81-91.
. CASETTI, E. (1986), *“The dual expansion method: an application for evaluating the effects of population growth on developement”*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-15; pp. 29-39.
. CASETTI, E. (1997A), *“Mixed estimation and the expansion method: An application to the spatial modelling of the AIDS epidemic”*. En “Recent developments in spatial analysis”, eds. M. Fischer y A. Getis, Springer-Verlag, Berlín; pp. 15-34.
. CASETTI, E. (1997B), *“The expansion method, mathematical modeling, and Spatial Econometrics”*. Internaetional Regional Science Review, 20 (1,2); pp. 9-34.
. CASETTI, E. y J.P. JONES (1988), *“Spatial parameter variation by orthogonal trend surface expansions: an application to the analysis of welfare program participation rates”*. Social Science Research, 16; pp. 285-300.
. CHASCO, C. (2003), *“Econometría espacial aplicada a la predicción-extrapolación de datos espaciales”*. Ed. Comunidad de Madrid. Madrid.
. FOTHERINGHAM, A., M. CHARLTON y C. BRUNSDON (1997), *“Measuring spatial variations in relationships with Geographically Weighted Regression”*. En “Recent development in spatial analysis”, eds. M. Fischer y A. Getis, Springer-Verlag, Berlín; pp. 60-82.
. GRIFFITH, D.A. (1992), *“A spatially adjusted N-way ANOVA model”*. Regional Science and Urban Economics, 22; pp. 347-369.
. HILDRETH, C. y J. HOUCK (1968), *“Some estimators for the linear model with random coefficients”*. Journal of the American Statistical Association, 63; pp. 584-595.
. JONES, J.P. y E. CASETTI (1992), *“Applications of the expansion method”*. London: Routledge.
. KRISTENSEN, G. (1998), *“Spatial heterogeneity in Danish urban areas”*. Actas del 38º Congreso de la Asociación Europea de Ciencia Regional (ERSA), ed. Universidad de Viena. Viena.
. LESAGE, J. (1999), *“Spatial econometrics”*. Department of Economics, University of Toledo.
. LÓPEZ, F.A. y M.A. PALACIOS (2000), *“Distintos modelos de dependencia espacial”*. Anales de Economía Aplicada XIV Reunión de Asepelt-España, Oviedo.
. LÓPEZ, F.A., M.A. PALACIOS y M. RUIZ (2001), *“Modelos explicativos del desempleo en términos de localización.Una aplicación a las provincias españolas.”*. Anales de Economía Aplicada XV Reunión de Asepelt-España, Santiago de Compostela.
. MORENO, R. y E. VAYÁ (2000), *“Técnicas econométricas para el tratamiento de datos espaciales: la econometría espacial”*. Edicions Universitat de Barcelona, colecció UB 44, manuals.
. MORENO, R., M. ARTÍS, E. LÓPEZ-BAZO y J. SURIÑACH (1997), *“Evidence on the complex link between infrastructure and regional growth”*. International Journal of Development Planning Literature, 12 (1&2), pp. 81-108.
. QUANDT, R. (1958), *“The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes”*. Journal of the American Statistical Association, 53; pp. 873-880.
. SANDBERG, K. y J. JOHANSSON (2001), *“Estimation of hedonic prices for co-operative flats in the city of Umeå with spatial autoregressive GMM”*. Actas del 41º Congreso de la ERSA (Asociación Europea de Ciencia Regional), Zagreb. CD-ROM.