Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Instituto de Políticas de Desarrollo – IPD

ESTIMACIÓN DE ALGUNAS FORMAS FUNCIONALES DE RELACIONES TECNOLÓGICAS ENTRE PRODUCTO Y FACTORES QUE DAN ORIGEN A ÉSTE*

Abril de 2004

Juan Miguel Villa.
j.villa@javeriana.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas básicos de la econometría aplicada es aquel que trata sobre la estimación de las funciones de producción (FP) que representan la relación tecnológica entre el producto (output) y factores (inputs). Aunque es teóricamente correcto definir una FP como la relación entre inputs y el valor máximo de output obtenido por una firma, a menudo la eficiencia de la tecnología es tomada con decisiones *a priori* que en la práctica son implementadas sin verificación[1].

Para una mayor facilidad, comprensión y propósito pedagógico, a lo largo de todas las caracterizaciones que se realicen en este artículo se tratará únicamente con dos inputs o factores de producción: capital y trabajo. Es responsabilidad del lector por su cuenta realizar las ampliaciones respectivas con inputs no tratados en el caso de necesitarlo para el proceso de aplicación práctica de lo que aquí se mencione.

2. CONCEPTOS Y GENERALIDADES

La representación más general que se le puede otorgar a las condiciones tecnológicas en un proceso input – output es alcanzado usando el lenguaje de conjuntos (Mas-Colell et. al, 1995). Esta representación de las posibilidades

* El presente artículo y su contenido es responsabilidad exclusiva del autor. Ninguno de sus comentarios comprometen a la Pontificia Universidad Javeriana o a la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas. Cualquier comentario será agradecido en la dirección de correo electrónico: j.villa@javeriana.edu.co

[1] Esta afirmación es realizada por Nakatani (1973) el cual critica la forma en que hasta ese año se han estimado las funciones de producción.

tecnológicas como un conjunto es la aproximación mas comprensible del análisis de la producción. Sin embargo, para cualquier aplicación practica o teórica, esta aproximación es muy general para ser bien usada. El conjunto apropiado para esto fines, restringido y especializado, es la FP la cual se entiende como un subconjunto de las posibilidades de producción.

La aproximación tradicional a la teoría del productor es la especificación de la FP que muestre el máximo output que puede ser obtenido con un nivel existente de conocimiento para unas cantidades dadas de inputs[2]. Se dice también que una FP es convexa porque existe una línea que une dos puntos del conjunto que contiene solamente puntos que pertenecen a dicho conjunto. Es de esta forma que los puntos del contorno superior de la representación gráfica de una FP contiene todos los puntos factibles de producción (Pecha, 2001).

Por otro lado, existe una amplia gama de formas funcionales de FP existentes desde los primeros intentos de A. R. J. Turgot[3] hasta las nuevas concepciones utilizadas en las recientes teorías de crecimiento económico. Las que en este caso se sugieren tener en cuenta se dividen en dos grupos: las que *a priori* suponen requisitos sobre los retornos a escala y elasticidades de sustitución y las que son flexibles en ese aspecto. Entre las primeras están la **Cobb – Douglas (C-D)**[4] y la FP de el elasticidad de sustitución constante **(CES)**, y en las segundas se considerarán la FP transcendental logarítmica **(Translog)** y la FP de elasticidad de sustitución variable **(VES)**.

3. Ingeniería Versus Economía

En qué se parecen los economistas a los ingenieros en el estudio de la tecnología? Básicamente en nada. Por lo general algunos estudiosos de la investigación de operaciones tienen a confundir la palabra tecnología con sofisticación, mientras los economistas tenemos bien en claro que dicho concepto

[2] De esta forma lo entiende Gary S. Becker (1971).
[3] Economista Fisiócrata y ministro de finanzas de Luis XV.
[4] Tal vez la más popular de todas (ver Villa 2003).

se refiere al conjunto de recetas (combinación de inputs) de producción factibles y posibles para una empresa de donde se obtiene una cantidad máxima de output.

Los datos que se utilizan en la ingeniería para realizar proyecciones de costos y producción son únicamente disponibles para hacer operaciones de programación lineal que pueden ser solucionadas por diversos métodos, en los que se encuentra, por ejemplo, el simplex. Mediante estas prácticas se omiten los conocimientos que intervienen en este proceso y tampoco se pueden incluir todas las actividades que lleva a cabo la firma (A. A. Walters, 1963).

Sin embargo, aunque en un trabajo empírico Vernon L. Smith[5] (1957) demostró que en la minimización de costos realizado por ingenieros se obtenían las mismas conclusiones derivadas por la teoría neoclásica de la producción, existen tres serios argumentos por los cuales los datos de ingeniería y la programación lineal deben ser descartados para el estudio de la tecnología:

1. Los modelos de programación lineal son interpretados como modelos de producción de corto plazo con algunos inputs y oferta dada.
2. La programación lineal no dice qué tienen que hacer las firmas para maximizar beneficios.
3. La programación lineal no describe las relaciones existentes en el proceso de producción entre inputs y output.

Por último, en este trabajo no se pretende realizar críticas de otros métodos que conduzcan a una mayor eficiencia de las empresas, sino el de mostrar una alternativa desde el punto de vista económico.

[5] Ganador del premio Nóbel de Economía en el año 2002.

4. DATOS PARA LA ESTIMACIÓN

Desde el punto de vista estadístico, hallar los datos para estimar funciones de producción es tal vez la labor más difícil y poco ajustable a los requerimientos de homogeneidad, independencia y normalidad[6] a primera vista.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede hacer una discriminación entre el tratamiento del producto, capital y trabajo por separado en cortes trasversales o en series de tiempo (caso más frecuente).

- Producto: idealmente los datos que se debería tener sobre el producto son las unidades totales físicas resultantes estrictamente de una actividad. Sin embargo, al no disponer de estos datos es conveniente usar los datos del valor de la producción indexados, en caso de disponer de una serie de tiempo, o realizar un índice de cantidades de Laspayres o Paasche con un año base determinado y especificado por el realizador de la estimación. Si se dispone de un corte transversal, no es necesario realizar esta clase de ajustes.
- Capital: realmente hay un problema de homogeneidad en cuanto al capital[7]. En la fabricación de un producto es factible que intervengan varias máquinas en este proceso y por otra parte existen otras que se encuentran en desuso pero que son contabilizadas por las empresas. Lo ideal sería usar los servicios de capital por hora, pero debido a la dificultad de esto, es conveniente utilizar los datos de los valores del capital fijo de las empresas y realizar el mismo ejercicio del producto. Ambos, productor y capital, deben estar formulados con un mismo año base en común.
- Trabajo: lo conveniente sería disponer de las horas de trabajo usadas como input en la tarea de estimación. De todos modos, puede ser conveniente usar el número de trabajadores incluidos o el promedio del número de trabajadores usados en una industria en caso de tener datos agregados.

[6] Siendo estas características los soportes de los supuestos de la regresión lineal clásica.
[7] De aquí se desprende la tan publicitada controversia de Cambrige.

- Otros inputs: se incluyen como índices tal y como se hace con el producto y el capital.

Otro aspecto que debe ser tenido en cuenta con los datos usados un modelo de estimación de FP es el problema de la agregación de datos cuando se pretende hacer estudios de una o varias industrias. Para solucionar esto, a pesar que la FP cambia aun en la misma industria, de firma a firma, de año a año, dependiendo del conocimiento tecnológico, estos aspectos pueden ser resumidos y representados por un parámetro aleatorio añadido o multiplicado al modelo a estimar como veremos más adelante.

5. Formas Funcionales y Modelos a Estimar

Como se sugirió al principio las formas funcionales de FP que vamos a tratar por separado son la **Cobb – Douglas, CES, Translog y VES**. Dentro de cada estudio se hará la respectiva justificación del porqué usar cada una de estas formas funcionales.

Aunque sin duda alguna los métodos disponibles para ser usados en la estimación de FP son escasos y poco publicados, luego de una exhaustiva investigación por parte del autor de este articulo se encontraron tres métodos frecuentes para lleva a cabo esta tarea. Estos últimos son: Estimación primal de estimación de funciones de producción, el método dual de funciones de costos y la estimación por medio de fronteras de producción estocásticas[8].

El método de estimación primal de FP asume que todas las firmas siempre producen con la mayor eficiencia de combinaciones de inputs y es uno de los más usados tradicionalmente. Por esto último será el utilizado para el enfoque presentado a continuación. El método que utiliza las funciones de costos sugiere el requerimiento de información sobre salarios y pagos a capital siendo esta labor muy difícil y mucho más heterogénea pues, por ejemplo, no se dispone de

[8] Esta última creada por Farrell (1957).

discriminaciones saláriales entre trabajadores calificados y no calificados. Por último, la implementación de fronteras estocásticas puede incluir la hipótesis de que la firma puede producir outputs con una combinación ineficiente de inputs en un punto del tiempo.

5.1. Forma funcional y modelo a estimar de la FP Cobb – Douglas.

Esta FP se ha convertido en una de las más aplicadas y famosas desde su creación el 1927. Su forma funcional está dada por la expresión,

$$Y = AL^a K^b \quad ...(1)$$

en donde el grado de homogeneidad medido por medio de la expresión $a + b = 1$ que relaciona los retornos a escala de la producción. Siguiendo a Villa (2003), cuando la C-D fue creada por Paul Douglas y Charles Cobb, lo que ellos notaron en las series te tiempo fue que las relaciones producto – trabajo y producto – capital permanecían constantes.

Econométricamente, es importante especificar la relación de errores en Y, por lo cual las perturbaciones (o residuales) aleatorias deben ser incluidas en la ecuación. Para esto, se conocen dos formas típicas:

- Perturbaciones aditivas: $Y = AL^a K^b + e \quad ...(2)$
- Perturbaciones multiplicativas: $Y = AL^a K^b e \quad ...(3)$

Para estimar A, a y b mediante estos modelos es conveniente usar algún método de regresión no lineal tal como el algoritmo de Newton – Gauss, Hooke, Nelder – Meade, Box, etc. Sin embargo, es mucho más fácil estimar estos parámetros con una simple transformación logarítmica de la forma,

$$\log(Y) = \log(A) + a\log(L) + b\log(K) + e \quad ...(4)$$

Para la cual se estima mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

Si suponemos que nuestra función C-D presenta rendimientos constates a escala (como debería ser) y competencia perfecta los parámetros de la ecuación (4) pueden ser perfectamente estimados por medio del modelo (usando MCO),

$$Log\left(\frac{Y}{L}\right) = Log(A) + aLog\left(\frac{K}{L}\right) + e \quad \text{...(5)}$$

Bajo este supuesto el valor de b simplemente sería el complemento de a con 1, es decir $b = 1 - a$. Sin embargo, con las estimaciones de los parteros tenidos en cuenta en la ecuación (4) se podría realizar una restricción de $a + b = 1$ mediante el uso de mínimos cuadrados restringidos o más bien llevar a cabo una prueba de restricciones de Wald.

Mediante cualquiera de los dos modelos de estimación presentados (ecuaciones (4) y (5)), se corre el riesgo de encontrarse con serios problemas de origen econométrico y teórico. El asunto competencia perfecta, maximización de beneficios y retornos constantes a escala nos lleva a asumir *a priori* condiciones que tal vez no presentan estas características pues en realidad los mercados presentan fallas y las empresas no son eficientes del todo. Estos dos últimos aspectos son resumidos en la variable de perturbación aleatoria e la cual además soluciona el los problemas de agregación de una industria con diferentes fábricas.

Un problema econométrico que se puede presentar con la ecuación (5) es el la multicolinealidad entre las variables explicativas del output, es decir, capital trabajo, energía, insumos, etc, ya que incrementos en el producto provocan incrementos en el capital e incrementos en el capital provocan incrementos en el uso de mano de obra. Para percatarse de lo anterior, es necesario hallar la matriz de correlaciones de las variables explicativas del modelo, calcular su determinante y verificar que no sea cercano a cero. Para cualquier caso, es necesario tener en cuenta que la multicolinealidad no es fenómeno que contradiga los supuestos del modelo de regresión clásico.

Aunque los economistas siempre hemos querido ser realistas en la práctica el uso de una función de producción Cobb – Douglas nos permite representar la tecnología de una manera interesante, eficaz y concluyente. Es más, en una de las más frecuentemente usadas para el análisis de la economía agregada.

5.2. Forma funcional y modelo a estimar de la FP CES

Esta, la Función de Producción de Elasticidad de Sustitución Constante, publicada por Arrow, Crenery, Minhas y Solow en 1961, es una forma funcional de tecnología que surgió como una generalización de las FP Cobb – Douglas y Leontief. Citando a los autores en su artículo *Capital - Labor Substitution and economic efficiency* escribieron:

“...El inicio del presente estudio fue la observación empírica que el valor añadido por unidad de trabajo usado en una industria dada varía a lo largo de los países con el nivel de salarios pagados. Una regresión entre la productividad y el nivel de salarios muestra una alta correlación significativa en todas las industrias... Estos hallazgos empíricos nos han llevado a derivar una función matemática teniendo la propiedades de homogeneidad, elasticidad de sustitución constante y la posibilidad de diferentes elasticidades para diferentes industrias...”

Con base a lo anterior, lo que los autores notaron fue que el output estaba determinados por un nivel cambiante de salarios entre las industrias (Pecha, 2001) para lo cual utilizaron en primera instancia el modelo Log – linealizado,

$$Log\left(\frac{V}{L}\right) = Log(a) + bLog(w) + e \qquad \ldots(6)$$

En donde V/L representa la relación producto – trabajo y w el nivel de salarios. El parámetro b sería la representación de la elasticidad de sustitución entre capital y trabajo.

Consecuentemente fue derivada la función de la forma,

$$Y = A\left\{aL^{-r} + (1-a)K^{-r}\right\}^{-h/r} \qquad \text{...(7)}$$

En la cual a representa el parámetro de distribución, h el grado de homogeneidad (usualmente igual a 1), r el parámetro de sustitución y A una constante positiva.

Por definición, la elasticidad de sustitución entre inputs está formulada de la forma,

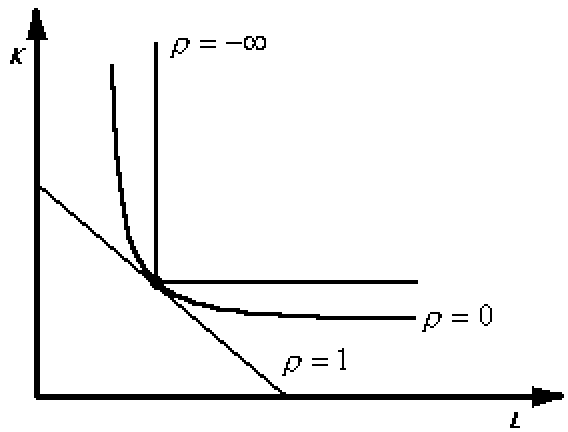
$$s = \frac{\ln(L/K)}{\ln(|RMS|)} \qquad \text{...(8)}$$

Para la cual, la Relación Marginal de Sustitución es igual a f_L / f_K. Con una serie de datos (corte transversal o serie de tiempo) se puede hallar sin ninguna complicación el valor de s, lo que requiere calcular los logaritmos naturales de L/K y de $\Delta L/\Delta K$ y realizar el cociente entre ellos.

Para el caso de la CES la aplicación de la ecuación (8) a la ecuación (/) nos lleva a la expresión,

$$s = \frac{1}{1-r} \qquad \text{...(9)}$$

Con la cual se analizan tres casos de esquina cuando $r = 1$, $r = 0$ y $r = -\infty$. Reemplazando estos valore en (9) la ecuación (7) se convertiría en su orden en una FP lineal (sustitución perfecta), una FP Cobb – Douglas (sustitución unitaria) y una FP Leontief (inputs complementarios). Gráficamente,



Teniendo en cuenta todo esto, si usted halla los valores s y si lo desea, despejando de la ecuación (9) el valor de r, analizando luego mediante técnicas de estadísticas descriptiva la serie resultante de s y si su varianza es fuertemente cercana o igual a cero esta es la función apropiada para realizar la estimación de la tecnología que usted desea.

La FP Leontief, con la forma funcional $Y = \min\{aL, bK\}$, su estimación es si se realiza directamente por métodos iterativos[9]. La FP lineal especificada de la forma $Y = A\{aL + (1-a)K\}$ es muy sencilla para ser estimada por medio de técnicas de estimación no lineales.

En general, la FP CES tiene dos modelos de estimación dependiendo de las perturbaciones (o residuales) aleatorias:

- Perturbaciones multiplicativas: $Y = \left(A\{aL^{-r} + (1-a)K^{-r}\}^{-1/r} \right) e$ ...(10)
- Perturbaciones aditivas: $Y = A\{aL^{-r} + (1-a)K^{-r}\}^{-1/r} + e$ ...(11)

[9] Véase Leontief (1946), (1949) y (1967).

Para la estimación directa de la ecuación (10) es necesario usar técnicas de regresión no lineales. Sin embargo, usando una expansión de Taylor alrededor de $r = 0$ podemos realizar una aproximación de (10), de tal forma que,

$$Log(Y) = Log(A) + h\,a Log(L) + h(1-a)Log(K) - r\,h\,a(1-a)\{Log(L) - Log(K)\}^2 \quad \text{...(12)}$$

Para fines estocásticos (12) debe ser,

$$Log(Y) = Log(A) + h\,a Log(L) + (1-a)Log(K) - (1/2)\,r\,h\,a(1-a)\{Log(L) - Log(K)\}^2 + u \quad \text{...(13)}$$

Esta expansión se le atribuye a Jan Kmenta la cual recibe el nombre de "*método para la aproximación de Kmenta para estimar una FP CES*", con lo cual se le dan nuevos nombres a los coeficientes, de tal manera que,

$$Log(Y) = c_0 + c_1 Log(L) + c_2 Log(K) + c_3\{Log(L) - Log(K)\}^2 + u \quad \text{...(14)}$$

En donde los coeficientes de las variables explicativas, c_i, corresponden a los mismos coeficientes de la ecuación (13) y merecen ser estimados por medio de MCO para lo cual u se encarga de los errores econométricos y técnicos que se puedan presentar. De esta forma $r = (-2c_3)/(a(1-a))$, $h = c_1 + c_2$, $A = \exp(c_0)$ y $a = c_1/(c_1 + c_2)$.

Otra forma para estimar la FP CES la propuso Zarembka. El procedimiento sugerido es el de realizar una transformación de la forma original de la CES con el siguiente resultado,

$$Y^{-r} = \left(a_1 L^{-r} + a_2 K^{-r}\right)e \quad \text{...(15)}$$

Lo que quiere decir que cada observación debe ser elevada a $-r$, previamente hallado mediante el procedimiento ya mencionado. Luego se realiza una Log – linealización y se estiman los parámetros mediante MCO.

5.3. Forma funcional y modelo a estimar de la FP VES

Las siglas FP VES significan Función de Producción de Elasticidad de Sustitución Variable. Fue publicada por Fletcher y Lu en 1968 con algunas ampliaciones de Ravankar en 1971.

Los argumentos de peso que dieron lugar a esta nueva forma funcional de la época partieron a partir de las observaciones y conclusiones después que los autores revisaran la FP CES. Esta última (como su nombre lo dice) está sujeta a la limitación de que el valor de la elasticidad de sustitución es constante. Sin embargo, cuando la relación capital – trabajo (o más bien el cociente entre ambos) cambia, es posible que la elasticidad de sustitución también cambie.

Lo anterior sugirió que el trabajo de Arrow *et. al.* hubiera sido mejor si se hubieran incluido también la mencionada relación capital – trabajo, de esta forma que,

$$Log\left(\frac{V}{L}\right) = Log(a) + b\log(w) + c\log\left(\frac{K}{L}\right) + e \qquad \text{...(16)}$$

De la cual se deriva la nueva forma funcional llamada VES,

$$Y = A\left\{aK^{-r} + (1-a)h(K/L)^{-c(1+r)}L^{-r}\right\}^{-1/r} \qquad \text{...(17)}$$

Para la cual, su elasticidad de sustitución está representada por medio de la expresión,

$$s = \frac{b}{1-c(1+wL/rK)} \qquad \text{...(18)}$$

La cual permite que la elasticidad de sustitución sea variable a lo largo de la isocuanta al incluir el cociente entre wL/rK.

Para la estimación de esta FP econométricamente es conveniente usar el modelo representado por medio de la ecuación (16) teniendo en cuenta que w hace referencia al salario real. De esa estimación se derivan los parámetros de la ecuación (17) de donde cada uno es:

$$r = \frac{1}{b-1} \quad \text{...(19)}$$

$$h = \frac{1-b}{1-b-c} \quad \text{...(20)}$$

La estimación de la ecuación (18) se realiza mediante una linealización de dicha ecuación y utilizando MCO.

La FP de producción VES es la forma funcional que usted debe utilizar en caso de encontrar que la elasticidad de sustitución entre los inputs no es constante. Aunque es necesario saber los valores de salarios reales y pagos a capital, es conveniente llevara cabo su implementación para no suponer condiciones *a priori* sobre la sustitución de factores tal como se hace con la C-D, Leontief, lineal y CES.

5.4. Forma funcional y modelo a estimar de la FP Translog

La FP Transcendental Logarítmica, publicada por Christensen, Jorgenson y Lau en el año de 1973, tiene una forma funcional lineal que puede ser estimada directamente si realizar ninguna transformación para adaptar el modelo a los supuesto de la regresión lineal. Dicha forma es,

$$Log(Y) = Log(A) + aLog(L) + bLog(K) + gLog(L)Log(K) + d\{Log(L)\}^2 + e\{Log(K)\}^2 \quad \text{...(21)}$$

La cual se reduce a una FP Cobb – Douglas si los parámetros g, d y e son iguales a cero. Por otro lado, exhibe elasticidad de sustitución variable a los largo de los niveles de producción y sus rendimientos no son necesariamente constantes. Es muy flexible en la aproximación de cualquier tecnología en términos de posibilidades de sustitución. En muchos trabajos empíricos se ha demostrado que existe dificultades con la estimación de los parámetros presentados en la ecuación (21). Dichas dificultades han sido de orden econométricos pues muchas veces los *t-statistics* no resultan con regularidad significativos.

Los coeficientes de la ecuación (21) son:

- α: Elasticidad del producto con respecto al trabajo.
- β: Elasticidad del producto con respecto al capital.
- γ: Es el parámetro que indica la complementariedad de trabajo y el capital con respecto al producto. Si este tiene signo positivo, quiere decir que ambos factores son sustitutos y si es negativo, complementarios.
- δ y ε: Representan el efecto marginal del producto y del trabajo sobre el producto respectivamente. Si estos factores presentan rendimientos decrecientes a escala, se espera que el signo de estos parámetros sea negativo.

6. Referencias

- Arrow, K. Chenery, H. Minhas, B. Solow, R. ***Capital – Labor Substitution and Economics Efficiency.*** The Review of Economics and Statistics. Vol 43, No 43. 1961.

- Christensen, Laurits R. Jorgenson, Dale W. Lau, Lawrence J. ***Transcendental Logarithmic Production Frontiers.*** The Review of Economic and Statistics. Vol 55, No. 1. 1973.

- Greene, William H***. Econometric Analysis***. Prentice Hall. Fourth edition. New Jersey, 1997.

- Fletcher, Lehman. Lu, Yao-chi. ***A Generalization of the CES Production Function***. The Review of Economics and Statistics. Vol 50, No 4. 1968.

- Humphrey, Thomas. ***Algebraic Production Functions and their uses before Cobb-Douglas.*** Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly. Washington,
2001.

- Kraipornsak, Paitoon. ***What Different ist the Production function Estimated by Different Methods? An Empirical Estimation Comparison***. Faculty of Economics, Chulanlongkorn University. 2001.

- Lau, Lawrence. **Functional Forms in Econometric Model Building. Handbook of Econometrics**. Volume 3, Chapter 26.

- Leontief, Wassily. ***Wages, Profit and Prices***. The Quarterly Jounal of Economics. Vol 61, No 1. 1946.

- Leontief, Wassily. ***Structural Matrices of National Economies***. Econometrica. Vol. 17. 1949.

- Leontief, Wassily. ***An Alternative to Aggregation in Input – Output Análisis and National Accounts***. The Review of Economics and Statistics. Vol 49, No 3. 1967.

- Ryu, Hang. Zellner, Arnold. ***Alternative Functional Forms for Production, Cost and Returns to Scale Functions.*** Journal of Applied Econometrics. Vol 13. 1998.

- Villa, J. M. ***Origen, Desarrollo y Aplicación numérica de la Función de Producción Cobb – Douglas***. PUJ – Maestría en Economía, Instituto del Políticas de Desarrollo - IPD. Bogotá, 2003.

- Walters, A. A**. Production Functions and Cost Functions: an Econometric Survey.** Econometrica, Vol. 31. January – April, 1963.